

Καταιγισμός από επαναστάσεις

Λένε συχνά ότι η χρονική κλίμακα των μεγάλων ιστορικών αλλαγών είναι σχεδόν γεωλογική, ότι μετράται περισσότερο σε αιώνες παρά σε έτη. Το 1914, η Ευρώπη στην οποία ζούσε η γιαγιά μου (που ήταν τότε 34 ετών) παρουσίαζε μια εικόνα πολύ διαφορετική από τη σημερινή: υπήρχε μια πολιτική ισορροπία λίγο πολύ αδιατάρακτη μετά το Συνέδριο της Βιέννης το 1815. Η Ευρώπη ήταν χωρισμένη σε πολλές ηπειρωτικές αυτοκρατορίες –Ρωσία, Αυστροουγγαρία, Τουρκία– και στις δυο αποικιοκρατικές υπερδυνάμεις – τη Γαλλία και τη Μεγάλη Βρετανία. Βέβαια η αυστροουγγρική αυτοκρατορία είχε τα ρήγματα της, οι λαοί της ανατολής (Πολωνοί, Φιλανδοί, λαοί της Βαλτικής) αισθάνονταν μάλλον άβολα στη ρωσική αυτοκρατορία και η ισχύς της Τουρκίας στα Βαλκάνια εξασθενούσε. Κανείς ωστόσο δεν προέβλεπε την κατάρρευση που σοβούσε.

Σ' αυτό τον κόσμο ζούσαν ο Μαξ Πλανκ και ο Ντάβιντ Χίλμπερτ. Στον επιστημονικό χώρο κυριαρχούσε χωρίς πολλές αμφισβητήσεις η γερμανική επιστήμη –φυσική, χημεία, μαθηματικά– βασισμένη σε μια ισχυρή και εξαπλούμενη βιομηχανία. Δεν έχετε παρά να συμβουλευθείτε τον κατάλογο των βραβείων Νόμπελ της εποχής! Αυτό που ονομάζω γερμανική επιστήμη καλλιεργείται στο Βερολίνο, τη Λειψία, το Γκέτινγκεν αλλά και στη Βιέννη, την Πράγα, τη Βουδαπέστη, τη Ζυρίχη, τη Στοκχόλμη... Την εποχή του θανάτου του Πλανκ και του Χίλμπερτ αυτός ο κόσμος δεν υπάρχει πια: οι αντισημιτικές διώξεις, ο πολιτικός φανατισμός των ναζί, η αναγκαστική μετανάστευση αφάνισαν τις εστίες της φιλελεύθερης γερμανικής σκέψης, πριν οι συμμαχικές βόμβες προκαλέσουν και την υλική τους καταστροφή.

Οι τρεις ηπειρωτικές αυτοκρατορίες καταρρέουν το 1918 και μια πληθώρα νέων κρατών βλέπει ξαφνικά το φως. Από επιστημονική άποψη αυτό δεν είναι αναγκαστικά αρνητικό. Πολλές εθνικές σχολές, με λαμπρότερη την πολωνική, αρχίζουν να ακμάζουν στα μαθηματικά. Έπειτα από μακροχρόνιους σπασμούς, η αυτοκρατορία των τσάρων γεννά τη Σοβιετική Ένωση που, παρά τον ολοκληρωτικό χαρακτήρα του καθεστώτος της, δημιουργεί μια λαμπρή μαθηματική σχολή με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Μετά την κατάρρευση του ναζιστικού ολοκληρωτισμού το 1945, η επιστημονική ανόρθωση της Γερμανίας είναι εξαιρετικά αργή, παρά την παρουσία κάποιων λαμπρών και διορατικών προσωπικοτήτων όπως ο Φρήντριχ Χίρτσεμπρουκ. Οι παγκόσμιες αυτοκρατορίες –Σοβιετική Ένωση και Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής– βγαίνουν ενι-

σχυμένες από αυτή την τρομερή αντιπαράθεση και μονοπωλούν οι δυο τους τον κύριο όγκο της έρευνας σε όλους τους τομείς της επιστήμης. Αρχίζει η περίοδος των εθνικών ανεξαρτητοποιήσεων που σηματοδοτεί την επιθανάτια αγωνία των αποικιακών αυτοκρατοριών της Γαλλίας και της Βρετανίας, ενάμιση αιώνα μετά το τέλος των δύο άλλων αποικιακών κυριαρχιών, της ισπανικής και της πορτογαλικής. Στα μαθηματικά η Μεγάλη Βρετανία μειονεκτεί λόγω του υπερελιτίστικου και συντηρητικού πανεπιστημιακού της συστήματος. Αντίθετα η Γαλλία, ενδεχομένως και από θέσεως, αρπάζει την ευκαιρία και κατακτά ξανά κυρίαρχη θέση¹. Θα εξετάσουμε πιο κάτω τις ιστορικές και περιστασιακές αιτίες που επέτρεψαν αυτή την επιστροφή στην κυριαρχία.

Μετά το μεγάλο κύμα των ανεξαρτητοποιήσεων της δεκαετίας του 1960, το τέλος της σοβιετικής αυτοκρατορίας το 1991 ανοίγει το δρόμο στη δημιουργία είκοσι πέντε περίπου νέων κρατών, εξαιρετικά άνισων σε μέγεθος, ισχύ και ανάπτυξη. Πρόκειται για μια επανάληψη της έκρηξης του 1920, αλλά χωρίς –προς το παρόν– και την ανάλογη ανάπτυξη εθνικών επιστημονικών σχολών. Οι επιρροές του παρελθόντος διατηρούνται: υπάρχουν αφρικανικά ή ασιατικά μαθηματικά, γαλλόφωνα ή αγγλόφωνα, που φέρουν το σημάδι της παλιάς κηδεμονίας, όμως οι διαφορές είναι αμελητέες σε σύγκριση με το τεράστιο ρεύμα της παγκοσμιοποίησης. Η Κίνα μπορεί να θεωρηθεί –στο Θιβέτ ή στο Ουιγκούρ– ως η τελευταία αποικιακή δύναμη, κανείς όμως δεν μπορεί να προβλέψει ποια θα είναι η εξέλιξή της. Είκοσι χρόνια μετά τη μαοϊκή τρέλα, η Κίνα δεν έχει κάποιο αξιολογικό επιστημονικό περιοδικό², ούτε κάποιο σταθερό πανεπιστημιακό σύστημα.

Δεν είναι εδώ ο χώρος για να επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τη νέα παγκόσμια ισορροπία για τα επόμενα πενήντα χρόνια. Άλλοι, καταλληλότεροι, το δοκίμασαν ήδη. Αυτό που ήδη γνωρίζουμε είναι ο διαρκώς αυξανόμενος όγκος των επιστημονικών εργασιών και συμπερασμάτων – ειδικά μάλιστα στα μαθηματικά. Υπάρχει ακόμα η ανάδυση νέων κρατών ή περιοχών: Κίνα, Ινδία, Λατινική Αμερική. Στο τέλος αυτής της εισαγωγής θα αναφερθούμε στο εννοιολογικό και ιδεολογικό πλαίσιο που θα μπορούσε να χρησιμέψει ως οδηγός σ' αυτή

1. Αυτό μπορεί να μετρηθεί και με μέτρο τα μεγάλα διεθνή βραβεία (για παράδειγμα, τα μετάλλια Φηλντς) αλλά και με το γεγονός ότι τα μεγάλα μαθηματικά περιοδικά δεν διστάζουν να δημοσιεύσουν στα γαλλικά!

2. Υπάρχουν μια δυο γενικές επιθεωρήσεις –που καλύπτουν από δημογραφία μέχρι αστροφυσική– και κανένα εξειδικευμένο περιοδικό.

την ανάπτυξη των επόμενων πενήντα ετών. Θα συζητήσουμε επίσης το ερώτημα αν τα θέματα του Χίλμπερτ μοιάζουν ακόμα επίκαιρα.

Οι μαθηματικές επαναστάσεις του 20ού αιώνα

Ο Τόμας Κουν θεωρητικοποίησε τον κύκλο: «...επιστημονική επανάσταση – σταθεροποίηση – επιστημονική...», μια εναλλαγή σύντομων περιόδων γρήγορων αλλαγών, ακολουθούμενων από μακρές περιόδους σταθεροποίησης, όπου οι κατακτήσεις διαγωνίζονται χάρη στη δομημένη διδασκαλία και την κανονιστική κωδικοποίηση μεθόδων και εννοιών. Πρόκειται για μια υπερβολικά σχηματική περιγραφή, που δεν λαμβάνει υπόψη τις πιθανές παλινωδίες, ούτε την έλλειψη συγχρονισμού της προόδου σε κλάδους πολύ γειτονικούς της επιστήμης. Πρόκειται ωστόσο για μια καλή προσέγγιση και για έναν χρήσιμο οδηγό.

Θα διακρίνουμε έξι κύριες φάσεις:

Η κληρονομιά του Κάντορ. Η θεωρία συνόλων γεννήθηκε από προβλήματα της ανάλυσης: χρειαζόταν να μελετηθούν κάποια ιδιαίτερα σύνολα που συνδέονταν με τη σύγκλιση (ή την απόκλιση) των σειρών Φουριέ. Με αυτή την ευκαιρία, ο Κάντορ ανακαλύπτει θεμελιώδεις έννοιες: αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα, κλειστότητα ενός συνόλου, ταξινόμηση του συνόλου των σημείων μιας ευθείας (ιεραρχία του Μπαιρ). Με τη βοήθεια αυτών των εννοιών προκύπτουν επιτέλους ικανοποιητικές λύσεις σε προβλήματα που παρέμεναν επί αιώνες ανοικτά και που συνδέονταν με τις θεμελιώδεις έννοιες του μήκους, του εμβαδού και του όγκου· ο Μπορέλ και στη συνέχεια ο Λεμπέγκ δημιουργούν τη σύγχρονη θεωρία του μέτρου και της ολοκλήρωσης.

Το κατά Λεμπέγκ ολοκλήρωμα είναι ένα από τα πιο θεμελιώδη εργαλεία που επινοήθηκαν κατά τον 20ό αιώνα. Από εκεί προκύπτει η συναρτησιακή ανάλυση και γνωρίζει λαμπρή και γρήγορη εξέλιξη:

- χώροι Χίλμπερτ (γύρω στο 1909)·
- τοπολογία, με τον Χάουσντορφ [*Συνολοθεωρία (Mengenlehre)* 1910]·
- χώροι Μπανάχ (γύρω στο 1925)·
- αξιωματικοποίηση των πιθανοτήτων (Κολμογκόροφ, 1934).

Βασιζόμενος σε αυτές τις κατακτήσεις, ο φον Νόουμαν θα δώσει, κατά τη δεκαετία του 1930, μια αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της νέας κβαντικής μηχανικής. Ακόμα, προχωρά πέρα από τους χώρους

Μπανάχ, δημιουργώντας τους τοπικά κυρτούς χώρους. Είναι το έδαφος πάνω στο οποίο θα καλλιεργηθούν οι κατανομές (Σομπόλεφ, 1936, και Σβαρτς, 1945). Η κβαντική θεωρία πεδίων (Γουάιτμαν γύρω στο 1960), η στατιστική μηχανική, η θεωρία των πιθανοτήτων και οι στοχαστικές διαδικασίες, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (με τους Λιόνς, Μαλγκράνζ και Χέρμαντερ) δεν είναι παρά μερικές μόνο από τις ακμάζουσες εφαρμογές της συναρτησιακής ανάλυσης σε μια ευρύτατη ποικιλία τομέων των θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών και της μαθηματικής φυσικής.

Είναι αξιοσημείωτο ότι τίποτα από όλα αυτά δεν περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα που διαμόρφωσε ο Χίλμπερτ στην ομιλία του 1900, με εξαίρεση ίσως την αξιωματικοποίηση των πιθανοτήτων. Μπορούμε να πούμε ότι και οι χώροι Χίλμπερτ εμφανίστηκαν ενάντια στις αρχικές προτιμήσεις του ίδιου του Χίλμπερτ. Ωστόσο το αξιωματικό πνεύμα –αν όχι τα εργαλεία– κυριαρχεί σε όλες αυτές τις εξελίξεις.

Η άλγεβρα και η θεωρία αριθμών. Εδώ βρισκόμαστε πλήρως στο πνεύμα του Χίλμπερτ. Όλα ξεκινούν από την Έκθεση (*Zahlbericht*) (1897) του ίδιου συγγραφέα που αναλύεται πιο κάτω από τον Τζέρεμυ Γκρέυ. Οι θεμελιώδεις έννοιες της σύγχρονης άλγεβρας (ομάδες, δακτύλιοι, σώματα) αναπτύσσονται στα τέλη του 19ου αιώνα, κυρίως από τους Ντέντεκιντ, Βέμπερ και Στάινιτς. Την εποχή της ομιλίας του Χίλμπερτ το 1900, όλα αυτά είναι ήδη έτοιμα. Η «μοντέρνα» άλγεβρα γεννιέται στα τέλη της δεκαετίας του 1920, στα χέρια του Έμιλ Άρτιν και της Έμμυ Νέθερ, και αποτελεί τη βάση του έργου του βαν ντερ Βέρντεν *Μοντέρνα άλγεβρα (Moderne Algebra)*, που χρησίμεψε ως εγχειρίδιο σε τρεις τουλάχιστον γενιές αλγεβριστών. Η αλλαγή είναι ταυτόχρονα μεθοδολογική –πρόκειται για μια επιτυχία της αξιωματικής μεθόδου– και ουσιαστική – αφού παρουσιάζονται νέα θεμελιώδη εργαλεία. Ωστόσο οι δημιουργοί της δεν λησμονούν καθόλου τα προβλήματα του Χίλμπερτ (ιδίως το 9ο) και η θεωρία των σωμάτων κλάσεων τους οφείλει πολλά, όσα και στους δημιουργούς της Τακάζι και Χάσσε. Οι Σεβαλέ και Βέιλ θα εξασφαλίσουν τη μετάβαση στην τρίτη φάση.

Η γέννηση του Μπουρπακί. Όπως όλοι γνωρίζουν, έλαβε χώρα στις αρχές της δεκαετίας του 1930, μετά την επιστροφή στη Γαλλία των Βέιλ και Σεβαλέ που είχαν ποτιστεί με το νερό της χιλμπερτιανής νεότητας. Η φιλοδοξία τους ήταν να πραγματοποιήσουν τη σύνθεση των δυο προηγούμενων φάσεων, να πετύχουν για το σύνολο των μαθηματικών αυτό που η *Συνολοθεωρία* του Χάουσοντορφ και η *Μοντέρνα άλγεβρα* του βαν ντερ Βέρντεν είχαν ήδη επιτελέσει κατά τρόπο απο-

σπασματικό. Η δραστηριοποίηση του Μπουρμπακί είναι αρκετά αργή, και θα παραμείνει υπόγεια μέχρι το 1945, ενώ θα ανθίσει πλήρως από το 1950 μέχρι το 1970. Θα αναλύσω με περισσότερες λεπτομέρειες αυτό το κίνημα αργότερα, μπορούμε όμως ήδη να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για μια (πετυχημένη) αρχετυπική αλλαγή παραδείγματος. Μετά τον Μπουρμπακί, ως πούμε προς το 1970, η σφαιρική αντίληψη για τα μαθηματικά θα έχει μεταβληθεί βαθιά και για μεγάλο διάστημα· πρόκειται δίχως αμφιβολία για τη μεγαλύτερη επιτυχία, έστω και με καθυστέρηση, του προγράμματος του Χίλμπερτ.

Ο θρίαμβος της γεωμετρίας. Ένα από τα κίνητρα του Αντρέ Βέλ, στις αρχές του εγχειρήματος Μπουρμπακί, ήταν να ενσωματώσει τη γεωμετρική παράδοση του Ελί Καρτάν, του συνεχιστή του Σόφους Λι. Η διατριβή του Ζωρζ ντε Ραμ (1930), που ετοιμάστηκε κάτω από την επίβλεψη του Ελί Καρτάν, έριξε μια γέφυρα ανάμεσα στην τοπολογία και τη διαφορική γεωμετρία. Οι μέθοδοι της «μοντέρνας» άλγεβρας, κυρίως η θεωρία των ιδεωδών, είχαν χρησιμοποιηθεί από τους Τσόου, βαν ντερ Βέρντεν και Ζαρίσκι για να δώσουν γερές βάσεις στην αλγεβρική γεωμετρία. Αυτή η αναζήτηση των θεμελίων υπήρξε ένας από τους οδηγούς της έρευνας στη γεωμετρία από το 1930 μέχρι το 1950. Η διατύπωση από τον Ε. Άρτιν μιας γεωμετρικής εκδοχής της περιφημής υπόθεσης Ρίμαν (1924) που σταδιακά γενικεύτηκε από τους Βέλ και Γκρόθεντιεκ θα αποτελέσει το ιερό δικοπότηρο αυτής της σχολής. Ο Βέλ, εμπνευσμένος από το έργο του Λέφσετς (που υπήρξε ο συνεχιστής του Πουανκαρέ), αντιλήφθηκε όλα όσα θα μπορούσε να φέρει η τοπολογία σ' έναν τομέα που *a priori* του έμοιαζε τόσο ξένος. Αυτή η σύντηξη του διακριτού της αριθμητικής και του συνεχούς της γεωμετρίας που είχε ήδη ξεκινήσει στις αρχές του αιώνα από τον Μινκόφσκι (στενό φίλο του Χίλμπερτ) συνεχίζει ακόμα και σήμερα να είναι ένας από τους κύριους στόχους της έρευνας.

Η περίοδος 1950-1970 υπήρξε κυριολεκτικά ο χρυσός αιώνας αυτού του είδους της γεωμετρίας. Ας μου επιτραπεί να αναφέρω τα σημαντικότερα ονόματα: Ανρί Καρτάν (γιος του Ελί), Κλωντ Σεβαλέ, Αντρέ Βέλ, Ζαν Πιέρ Σερ, Αρμάν Μπορέλ, Σερζ Λανγκ, Τζων Τέιτ, Φρήντριχ Χίρτσεμπρουκ, Μίκαελ Άρτιν (γιος του Έμιλ) ... κι ένα σωρό άλλοι. Αυτός που κυριαρχεί από το ύψος του είναι ο Αλεξάντρο Γκρόθεντιεκ, που τη λαμπρή σταδιοδρομία του περιγράφει ο Τζέρεμυ Γκρέυ.

Στο τέλος αυτών των ανακατατάξεων, η γεωμετρία εμφανίζεται ως ο ενοποιός άξονας όλων των μαθηματικών, πληρώνοντας το τίμημα,

όπως το επιθυμούσε ο Σεβαλέ, μιας «αλγεβροποίησης μέχρι θανάτου». Η επιταγή του Κάντορ, για μια μαθηματική επιστήμη θεμελιωμένη πάνω στην έννοια του συνόλου, έχει εν μέρει ξεπεραστεί. Η έννοια της κατηγορίας επιτρέπει μια πιο οργανική θέαση των μαθηματικών, που πολλοί κλάδοι τους θα αλληλεπιδρούσαν μόνιμα μέσω των συναρτηστών (foncteurs). Πρόκειται για μια απόκλιση από τις προοπτικές του Χίλμπερτ; Και ναι και όχι. Ναι, αφού η τοπολογία δεν υπάρχει στο πρόγραμμα του 1900 και ο Πουανκαρέ αγνοείται από τον Χίλμπερτ³! Όχι, γιατί η αξιωματική μέθοδος παραμένει και σήμερα ένα γόνιμο και αδιαμφισβήτητο εργαλείο.

Η εισβολή του αυτόματου υπολογισμού. Δεν χρειάζεται να πείσω τον σημερινό αναγνώστη για τη σημασία των αλλαγών που επήλθαν από την ανάπτυξη και τη χρήση των υπολογιστών. Σαράντα χρόνια ύστερα από τις προφητείες των Βίνερ και ΜακΛούαν, ο σύγχρονος κόσμος είναι αυτός της επικοινωνίας. Τι δουλειά έχουν όμως τα μαθηματικά σ' αυτή την ιστορία;

Οι υπολογιστές είναι τέχνα της φυσικής (ηλεκτρονική και μικροηλεκτρονική), της μηχανικής (σμίκρυνση, δίκτυα δορυφόρων, υγροί κρύσταλλοι...) αλλά και των μαθηματικών. Τριάντα χρόνια πριν να υπάρξουν οι υπολογιστές ως υλικά αντικείμενα, μαθηματικοί και μάλιστα τόσο φορμαλιστές όσο ο φον Νούμαν και ο Τούρινγκ οραματίστηκαν την οργάνωση και τη λειτουργία τους. Χωρίς τη μονομανή σχολαστικότητα των λογικιστών (βαθιά εμπνευσμένων από το μεταμαθηματικό πρόγραμμα του Χίλμπερτ) δεν θα υπήρχαν τα εννοιολογικά εργαλεία του προγραμματισμού. Μια σημαντική εφαρμογή ενδέχεται να απαιτήσει μέχρι και 150.000 γραμμές κώδικα (σε γλώσσα C₊₊), κάτι που ξεπερνά κατά πολύ το τρελό εγχείρημα των *Μαθηματικών αρχών* (*Principia Mathematica*) των Ράσσελ και Γουάιτχεντ. Για την ύπαρξη και την ανάπτυξη των μαθηματικών, ο υπέρμετρος φορμαλισμός υπήρξε ίσως μια πολυδάπανη παραξενιά, χάρη σ' αυτόν όμως μπορούμε σήμερα να στέλνουμε ρομπότ στον Άρη ή στα πέρατα του ηλιακού μας συστήματος.

Η ανταπόδοση στα μαθηματικά μόλις που αρχίζει. Μια νέα γενιά μαθηματικών χρησιμοποιεί αποτελεσματικά το εργαλείο της πληροφορικής και όχι μόνο για να διαχειρίζεται το πληθωρικό ηλεκτρονικό ταχυδρομείο! Απίστευτα πολύπλοκες αλγεβρικές καταστάσεις μπορούν να διερευνηθούν και να αναλυθούν, όλο και πιο μεγάλοι αριθμοί μάς γίνονται οικείοι, εικασίες της θεωρίας αριθμών γεννιούνται,

3. Για λόγους περισσότερο προσωπικούς παρά επιστημονικούς.

αποδεικνύονται ή καταρρίπτονται, περίπλοκες εξισώσεις αποκτούν απροσδόκητες λύσεις, η οπτικοποίηση ανανεώνει τη μαθηματική προοπτική.

Για πρώτη φορά εδώ και 2.000 χρόνια οι κανόνες του μαθηματικού παιχνιδιού έχουν μπει σε μια διαδικασία αλλαγής. Όπως ακριβώς τα τουρνουά ανάμεσα σε γκραν μαιτρ και υπολογιστές ανατρέπουν το παιχνίδι του σκακιού, η συνεργασία ανθρώπου-μηχανής γεννά μια νέα δεοντολογία στα μαθηματικά. Ήδη διαθέτουμε δυο σημαντικά αποτελέσματα (το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων και το πρόβλημα της στοιβαξης σφαιρών του Κέπλερ), όπου η μετάφραση σε «ανθρώπινη» απόδειξη μιας ευρείας κλίμακας επαλήθευσης μέσω υπολογιστή (της τάξεως των 150.000 εξισώσεων με πολλούς αγνώστους στην περίπτωση του προβλήματος του Κέπλερ) δεν έχει ακόμα γίνει και ίσως δεν θα γίνει ποτέ. Για να εξασφαλίσει την εγκυρότητα μιας απόδειξης, ο Χίλμπερτ είχε οραματιστεί να τη μηχανοποιήσει· ωστόσο προκύπτει το ερώτημα του πού έγκεινται η λογική και η πειθώ ενός πολλαπλασιαζόμενου τέρατος, έστω και αν λειτουργεί με βάση κανόνες; Εμείς οι μαθηματικοί, αφού παίξαμε τον μαθητευόμενο μάγο, ανακαλύπτουμε αυτό που οι φυσικοί, οι βιολόγοι και οι χημικοί γνώριζαν ήδη: απλοί νόμοι ενδέχεται να δημιουργήσουν έναν ιδιαίτερα περίπλοκο κόσμο.

Η επιστροφή της μηχανικής. Ο Πουανκαρέ είχε δημιουργήσει τον ασυμπτωτικό λογισμό, την ποιοτική δυναμική, μέχρι και την τοπολογία με αφορμή το βιβλίο του *Νέες μέθοδοι της ουράνιας μηχανικής (Méthodes nouvelles de la mécanique céleste)*. Όμως, γύρω στα 1950, εν μέρει λόγω της απηρχαιωμένης διδασκαλίας της «θεωρητικής μηχανικής», οι αναμορφωτές της πανεπιστημιακής εκπαίδευσης στη Γαλλία πέταξαν τη μηχανική στα αζήτητα.

Από εκεί ξαναβγήκε κυρίως χάρη στους σοβιετικούς μαθηματικούς γύρω από τον Κολμογκόροφ και τον Άρνολντ. Η πρόοδος της διαφορικής γεωμετρίας, σύμφωνα με το δρόμο που άνοιξε ο Ελί Καρτάν, έδωσε τη δυνατότητα (γύρω στα 1970) της γεωμετροποίησης της κλασικής μηχανικής. Η νέα έννοια της συμπλεκτικής πολλαπλότητας (που σίγουρα την είχαν προβλέψει ο Καρλ Λούντβιχ Σίγκελ και ο Χέρμαν Βάιλ) ήρθε να προστεθεί στα πιο κλασικά εργαλεία του απόλυτου διαφορικού λογισμού (που είχαν δοκιμαστεί γερά από τη γενική σχετικότητα) και έδωσαν νέες γερές βάσεις στις παλιές μεθόδους της λαγκρανζιανής και της χαμιλτονιανής μηχανικής. Οι απαισιόδοξοι είχαν ισχυριστεί ότι η νέα κβαντική μηχανική θα εκθρόνιζε οριστικά την κλασική μηχανική. Χρειάστηκαν πολλές δεκαετίες για να γίνει πλή-

πως κατανοητό πόσο η προσέγγιση του Χάιζενμπεργκ (ο λογισμός των πινάκων) είναι πολύ πιο βαθιά από αυτή του Σρέντινγκερ (και την κυματική του εξίσωση). Σύμφωνα με την οπτική γωνία του Χάιζενμπεργκ, η δυναμική εξακολουθεί να περιγράφεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον αλλά η κινηματική γίνεται «μη αντιμεταθετική». Η κλασική μηχανική από αυτή την άποψη δικαιώνεται.

Οι δυο βασικοί πυλώνες της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής είναι η θεωρία της βαρύτητας του Αϊνστάιν (χρήσιμη κυρίως στην κοσμολογία και την αστροφυσική) και η κβαντική θεωρία πεδίου (που ελέγχει τις πυρηνικές και υποπυρηνικές διαδικασίες). Η θεωρία των χορδών, ακόμα πολύ θεωρητική για τη φυσική, φιλοδοξεί να πετύχει τη σύνδεση ανάμεσα στους δυο αυτούς πυλώνες. Χρησιμοποιεί ένα γιγάντιο οπλοστάσιο γεωμετρίας ενώ ανανέωσε κάποια από τα πιο κλασικά μέρη των μαθηματικών (επιφάνειες Ρίμαν). Δεν μπορώ παρά να αναφερθώ σε διάφορες ανταγωνιστικές προσεγγίσεις: μη αντιμεταθετική γεωμετρία του Αλαίν Κονν, star products (Λιχνέροβιτς, Φλάτο, Κόνστεβιτς), κβαντικές ομάδες (Ντρίνφελντ...). Από το 1985 και μετά δεν τίθεται θέμα για τους μαθηματικούς, ακόμα και τους πιο θεωρητικούς, να αγνοήσουν τις εξελίξεις της μαθηματικής φυσικής.

Το εγχείρημα Μπουρμπακί

Ήδη έχω περιγράψει την κύρια φιλοδοξία του Μπουρμπακί:

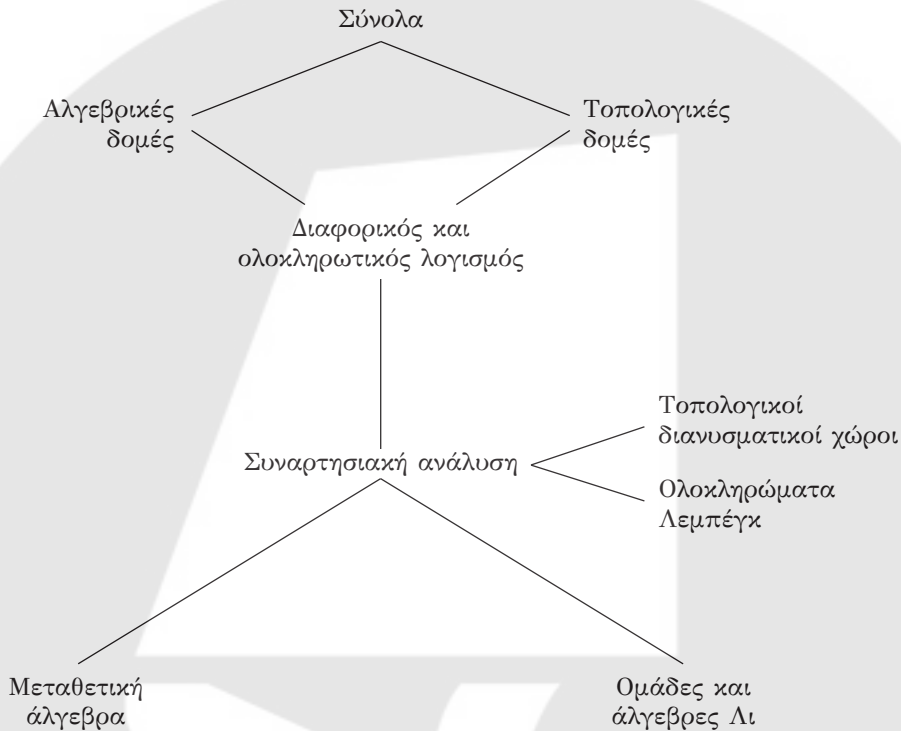
- Να επεκτείνουν σε όλα τα μαθηματικά την αξιωματική παρουσίαση του Χάουσοντορφ (τοπολογία) και του βαν ντερ Βέρντεν (άλγεβρα).
- Να θέσουν γερά θεμέλια στη διαφορική γεωμετρία των Σόφους Λι και Ελί Καρτάν.

Ο επιδιωκόμενος στόχος είναι μια παρουσίαση με πλήρη συνοχή («η πραγματεία παρουσιάζει τα μαθηματικά από την αρχή τους και δίνει πλήρεις αποδείξεις⁴») του συνόλου των κλάδων των μαθηματικών. Είναι ακόμα η απόλυτη πίστη στην ενότητα των μαθηματικών, με κίνδυνο να παραμεληθούν κάποια περιθωριακά μέρη (πιθανότητες, συνδυαστική, λογική...). Τέλος ο Μπουρμπακί προωθεί μια πυραμιδωτή οργάνωση των μαθηματικών, κυριαρχούμενη από τη θεωρία συνόλων. Το σύνολο των σαράντα τόμων που εκδόθηκαν⁵ μπορεί να συ-

4. Από την εισαγωγή του Εγχειριδίου Χρήσης του Μπουρμπακί.

5. Πραγματική σπαζοκεφαλιά για τους βιβλιοθηκάρειους που χάνονται στον κυκλώνα των επανεκδόσεων!

νοφιστεί στο ακόλουθο Leitfaden (ο Ντιεντονέ συνήθιζε να παρουσιάζει στα μέλη του Μπουρμπακί διαγράμματα αυτού του τύπου, όλο και πιο φιλόδοξα):



Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, δεν αντιπροσωπεύεται το σύνολο των σύγχρονων μαθηματικών. Ειδικότερα η θέση της ανάλυσης (διαφορικές εξισώσεις, μερικές διαφορικές εξισώσεις, ολοκληρωτικές εξισώσεις, συναρτησιακοί μετασχηματισμοί τύπου Φουριέ ή Λαπλάς) είναι ιδιαίτερα περιορισμένη. Η διαφορική γεωμετρία εμφανίζεται μόνο με συνοπτική μορφή, το φυλλάδιο αποτελεσμάτων δίνει τους ορισμούς, όχι όμως και τις αποδείξεις⁶. Όμως η θεμελίωση των μαθηματικών στηρίζεται σε γερές βάσεις: το τεράστιο έργο του Γκρόθεντιεκ πατά γερά στο έργο του Μπουρμπακί: άλλωστε ο Ντιεντονέ δάνεισε την πένα του στην τελική γραφή τόσο των περισσότερων τόμων του Μπουρμπακί όσο και των έργων του Γκρόθεντιεκ.

6. Ενώ η λογική του Μπουρμπακί, εμπνευσμένη από τον Χίλμπερτ και αντίθετα με την παράδοση του Port-Royal, δίνει προβάδισμα στις αποδείξεις εις βάρος των ορισμών.

Για να υπηρετηθεί ένα τέτοιο εγχείρημα –που ας θυμίσουμε ότι εξελίχθηκε για 50 περίπου χρόνια, από το 1935 μέχρι το 1985– απαιτούνται ισχυρές προσωπικότητες και ομαδική πίστη. Οι προσωπικότητες δεν έλειψαν: οι ιδρυτές, από τους οποίους θα επιβιώσουν οι Ντιεντονέ, Σεβαλέ, Ντελσάρτ, Καρτάν και Βέλ, μια δεύτερη γενιά με τον Σβαρτς και τον Άιλενμπεργκ και μια τρίτη γενιά στην οποία ξεχωρίζουν κυρίως ο Σερ και ο Γκρόθεντιεκ.

Η πίστη που τους εμπνέει είναι αυτή της ελπίδας σ' έναν καινούργιο κόσμο. Ο Αντρέ Βέλ, παρόλο που προς το τέλος της ζωής του το αρνιόταν, είχε προσεγγίσει χάρη στην αδελφή του, τη στρατευμένη φιλόσοφο Σιμόν Βέλ, τους επαναστατικούς κύκλους. Σύμφωνα με μαρτυρίες του αδελφού της, γύρω στο 1935 φιλοξενούσε στο σπίτι των γονιών της, συχνά προκαλώντας τη δυσαρέσκειά τους, φυγάδες κομμουνιστές από τη Γερμανία, τη Ρωσία και την Ανατολική Ευρώπη. Ο Αντρέ Βέλ στο τέλος των επιστολών του προς την αδελφή του έγραφε «Ζήτω η επανάσταση». Όσο για το φίλο του Κλωντ Σεβαλέ, έγραφε σ' ένα περιοδικό που είχε τον τίτλο *Νέα Τάξη*⁷. Η εισαγωγή του Μπουρμπακί και πολλά άλλα κείμενά του μοιάζουν πολύ με τα μανιφέστα των σουρεαλιστών και των ντανταϊστών: «du passé faisons table rase⁸». Μια ιστορία, με μικρή μόνο δόση υπερβολής, λέει ότι η 4η Διεθνής του Τρότσκι ιδρύθηκε στο διαμέρισμα του Αντρέ Βέλ, ενώ οι φιλανδικές αρχές τον θεώρησαν σοβιετικό πράκτορα όταν κατέφυγε στη Φιλανδία, το φθινόπωρο του 1939. Αργότερα, ο Λωράν Σβαρτς, που ανάμεσα στο 1950 και το 1970 έπαιξε σημαντικό ρόλο στα επιστημονικά και πολιτικά πράγματα, υπήρξε δηλωμένος και ένθερμος τροτσκιστής.

Ανέφερα πιο πάνω το Zeitgest. Κατά τη δεκαετία του 1930, οι ιδρυτές του Μπουρμπακί είναι συντονισμένοι με το όραμα της πολιτικής και κοινωνικής ανανέωσης που συνταράσσει τη γέριχη Ευρώπη. Συγκρούονται με την παλιά γενιά των γάλλων μαθηματικών που οι ερευνητικοί στόχοι και οι μέθοδοι διδασκαλίας τους είναι εντελώς ξεπερασμένοι. Η ανανέωση δεν μπόρεσε να γίνει με φυσιολογικό τρόπο, γιατί ο πόλεμος του 1914-18 είχε αποδεκατίσει την ελίτ της γαλλικής επιστήμης. Η χρυσή εποχή της κυριαρχίας του Μπουρμπακί

7. Να μη συγχέεται με την ακροδεξιά οργάνωση που έδρασε στη Γαλλία τις δεκαετίες του 1960 και 1970. Κατά την περίοδο του μεσοπολέμου το σύνθημα «νέα τάξη» είχε υιοθετηθεί κυρίως από προοδευτικές οργανώσεις και ρεύματα.

8. «Ας ισοπεδώσουμε το παρελθόν». Στίχος από τον ύμνο της Διεθνούς ο οποίος γράφτηκε στα γαλλικά.

(1950-1970) συμπίπτει με τη φάση της ανοικοδόμησης μετά τον πόλεμο του 1939-45. Η αμφιλεγόμενη θέση της Γαλλίας, που ο Ντε Γκωλ κατάφερε να βάλει με το ζόρι στο τραπέζι των νικητών⁹, την άφησε συγκριτικά αλώβητη από τις σφαγές και τις καταστροφές. Ταυτόχρονα νικημένη και νικήτρια, καταφέρνει να κερδίσει μια αυτόνομη θέση στον επιστημονικό χάρτη σε αντίθεση με τη Γερμανία, που είναι ολότελα κατεστραμμένη από τη ναζιστική παράνοια και τον πόλεμο, και τη Μεγάλη Βρετανία, που η γλωσσική και πολιτιστική συγγένεια ενθαρρύνει την έξοδο της επιστημονικής ελίτ της προς τις Η.Π.Α. Ως προς τις μαθηματικές βάσεις του συγγράμματος του Μπουρμπακί, η σταθερή και πιστή φιλία του Καρτάν με τον Χίρτσεμπρουκ βάζει τα θεμέλια μιας μαθηματικής Ευρώπης: επιστέγασμα είναι η δημιουργία της Ευρωπαϊκής Μαθηματικής Εταιρείας και η θέσπιση ευρωπαϊκών συνεδρίων ανά τέσσερα χρόνια (αρχίζοντας από το 1990). Όλα αυτά δείχνουν ότι, αντίθετα με την άποψη που γίνεται δεκτή με υπερβολική ευκολία, οι μαθηματικοί δεν είναι όλοι κλεισμένοι μέσα στους γυάλινους πύργους τους. Μερικοί «τα βάζουν με την εποχή τους», όπως αναφέρει και ο τίτλος της αυτοβιογραφίας του Λωράν Σβαρτς¹⁰.

Απομένει να περιγράψουμε τη μαθηματική ιδεολογία του Μπουρμπακί, που βρίσκεται σε ευθεία γραμμή με την παράδοση του Χίλμπερτ. Βαθιά ριζωμένη στο εγχείρημα της επανίδρυσης της δεκαετίας του 1930, έχοντας τη δική της δογματική δυσκαμψία και την προσήλωσή της στην καθαρότητα των μαθηματικών ιδεών, δεν μπόρεσε να αντισταθεί στην κατάρρευση, γύρω στο 1990, ενός συγκεκριμένου επαναστατικού ιδεολογικού στυλ ούτε και στο άνοιγμα προς μια νέα οικουμενικότητα όπου τα όρια, επιστημονικά και εθνικά, έχουν αποσθρωθεί.

Το ιδεολογικό οπλοστάσιο: ο στρουκτουραλισμός

Αντί να επαναλάβουμε τη συνηθισμένη ιστοριογραφία του Μπουρμπακί, τα σχετικά με την αγάπη του για τη μυστικοπάθεια (του Καραγκιόζη) και τις κολεγιακές φάρσες του, αξίζει να ασχοληθούμε με τη ραχοκοκαλιά του συγγράμματός του: το στρουκτουραλισμό.

Οι θεμελιώδεις ιδέες του στρουκτουραλισμού γεννιούνται με τη

9. Όπως άλλωστε και ο Ταλειϋράνδος στο Συνέδριο της Βιέννης, το 1815.

10. Ένας μαθηματικός τα βάζει με την εποχή του είναι ο τίτλος της αυτοβιογραφίας του Λωράν Σβαρτς.

γεωμετρία. Κατά τον 19ο αιώνα, επικρατεί η συνήθεια να ιεραρχούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες σε ομοπαράλληλικές, μετρικές, σύμμορφες, προβολικές. Εγκαθιδρύεται μια ιεραρχία των εννοιών και των μεθόδων συλλογισμού. Κάτω από την επίδραση της στατικής, αρχίζουμε με τους τανυστές: παραλληλόγραμμα, διανύσματα, ομοιοθεσίες αρχικά με ακέραιο λόγο και στη συνέχεια με ρητό. Η αυστηρότητα του λογισμού των συντεταγμένων που δημιούργησε ο Καρτέσιος και που επιβάλλει να εφοδιάσουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα με ένα σταθερό και αυθαίρετο σύστημα αναφοράς χαλαρώνει και εξελίσσεται με τρόπο πιο γεωμετρικό. Ας θυμηθούμε κάποια στάδια: βαρυσκεντρικός λογισμός του Μέμπιους, επεκτατικός λογισμός του Γκράσμαν, κουατερνιόνια (τετραδικοί αριθμοί) του Χάμιλτον· όλα οδηγούν στον διανυσματικό λογισμό όπως τον χρησιμοποιούμε σήμερα (κωδικοποιήθηκε από τον Γκιμπς γύρω στο 1890).

Σε κάθε βήμα της γεωμετρίας πρέπει να εισάγονται νέες έννοιες. Ο διανυσματικός λογισμός επαρκεί για τη μελέτη των ευθειών, των επιπέδων και των τομών τους. Ωστόσο δεν μπορούμε να μιλάμε για γωνίες και για αποστάσεις πριν ορίσουμε το βαθμωτό (ή εσωτερικό) γινόμενο. Η ιεραρχία των γεωμετρικών κωδικοποιείται με δύο τρόπους:

– Με τον εσωτερικό τρόπο, όλα υπάγονται στον προβολικό χώρο όπου οι θεμελιώδεις έννοιες είναι η ευθεία και ο διπλός λόγος τεσσάρων συνευθειακών σημείων. Για να κάνουμε ομοπαράλληλική γεωμετρία, επιλέγουμε ένα επίπεδο που το τοποθετούμε στο άπειρο. Για να κάνουμε μετρική γεωμετρία, επιλέγουμε μια καμπύλη στο άπειρο. Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες περιγράφονται επίσης μέσω του προβολικού επιπέδου στο οποίο επιλέγουμε κάποια «απόλυτα» στοιχεία.

– Από την εξωτερική σκοπιά, όπου έχουν το προβάδισμα οι συμμετρικές, καταλήγουμε, σύμφωνα με τον Φέλιξ Κλάιν, στην ταύτιση μιας γεωμετρίας με την ομάδα των συμμετριών της. Αυτό δεν αποφεύγει κάποιες απώλειες στην ουσία.

Από μεθοδολογική άποψη, τα δυνατά σημεία του στρουκτουραλισμού είναι τα ακόλουθα:

– Η φύση των αντικειμένων δεν ενδιαφέρει, το μόνο που ενδιαφέρει είναι οι μεταξύ τους σχέσεις

– Η έννοια της συμμετρίας επεκτείνεται σε αυτή του ισομορφισμού. Αυτή η έννοια εμφανίζεται στη θεωρία ομάδων, όπου κωδικοποιείται από τα «θεωρήματα της δεσποινίδος Νέθερ».

– Τα ισόμορφα αντικείμενα δεν είναι παρά διαφορετικές ενσάρκώσεις του ίδιου αρχετύπου. Αυτή η ιδέα επιβάλλεται στη μη ευκλεί-

δεια γεωμετρία, όπου για την επιπεδομετρία του Λομπατσέφσκι έχουμε μια πολλαπλότητα μοντέλων (Κέιλυ, Κλάιν, Πουανκαρέ).

– Ως πόρισμα, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μεταφορά των δομών και να εφαρμόσουμε σ' ένα μοντέλο της θεωρίας αποτελέσματα που βρήκαμε σ' ένα άλλο μοντέλο.

– Διάκριση ανάμεσα στις μονότιμες και τις πολύτιμες θεωρίες. Η ευκλείδεια γεωμετρία είναι μονότιμη, γιατί τα μοντέλα της είναι όλα ισόμορφα, ενώ η πανγεωμετρία (γεωμετρία πριν από την εισαγωγή οποιουδήποτε αξιώματος παραλλήλων) είναι πολύτιμη γιατί διακλαδώνεται στην ευκλείδεια, τη σφαιρική και την υπερβολική γεωμετρία, ανάλογα με την επιλογή που κάνουμε σχετικά με την ύπαρξη παραλλήλων. Η θεωρία ομάδων είναι πολύτιμη, αφού εξετάζει κοινές ιδιότητες όλων των ομάδων ή συγκεκριμένων κατηγοριών ομάδων, παρόλο που όλες οι ομάδες δεν είναι ισόμορφες.

Το λογικό εργαλείο που προτιμάται είναι η αξιωματική μέθοδος: διατυπώνουμε στην εκκίνηση τις βασικές ιδιότητες και συνάγουμε τις συνέπειες, που εφαρμόζονται σε όλα τα αντικείμενα που τις ικανοποιούν. Οι λογικοί κωδικοποίησαν αυτή την κατάσταση διακρίνοντας μια σύνταξη –που μελετά τη λογική διαδοχή των προτάσεων σύμφωνα με μια τυπική γραμματική– από τη σημαντική που ταξινομεί και μελετά τα μοντέλα μιας θεωρίας. Η αξιωματική μέθοδος μπορεί να λάβει ερευνητικό χαρακτήρα, να μετατραπεί σε παιχνίδι πάνω στις παραλλαγές της υπόθεσης βάσης. Ο σκόπελος είναι ο κίνδυνος να δημιουργήσει κανείς «κενές» αξιωματικές σύμφωνα με την περιγραφή του Ντιεντονέ. Ενδέχεται ακόμα μια ασήμαντη μεταβολή των αξιωμάτων, που κανένα τυπικό κριτήριο δεν μπορεί να την ελέγξει, να ανοίξει το πεδίο των εφαρμογών, ή αντίθετα να κλείσει το δρόμο σε ενδιαφέρουσες εξελίξεις. Στη φυσική, το παράδειγμα των ημικρυστάλλων μάς θύμισε ότι στη φύση αρέσει να μας εμπαιξεί υποχρεώνοντάς μας να επανεξετάσουμε συνολικά την εξαιρετικά όμορφη μαθηματική θεωρία των κρυστάλλων που έγινε ανεπαρκής.

Η αρχιτεκτονική των μαθηματικών

Η έκφραση ανήκει στον Μπουρπακί, η βασική ιδέα είναι του Χίλμπερτ. Συνίσταται στο να τα υποτάξουμε όλα στη θεωρία συνόλων. Με την οπτική του Χίλμπερτ και για να αποφύγουμε τα παράδοξα (Ράσσελ, Μπιουράλι-Φόρτι) πρέπει να αξιωματικοποιήσουμε. Αυτό πραγματοποιήθηκε από τους Τσερμέλο-Φράνκελ και αργότερα από

τον φον Νούμαν και τον Γκέντελ. Ωστόσο τα παράδοξα επανήλθαν με την πιο περίπλοκη μορφή της μη αποκρισιμότητας θεμελιωδών ιδιοτήτων όπως η υπόθεση του συνεχούς. Το αναπόφευκτο συμπέρασμα είναι πως δεν υπάρχει μια μοναδική θεωρία συνόλων, ότι έχει πολλά διαφορετικά μοντέλα, όπως η πανγεωμετρία που αναφέραμε πιο πάνω: εξέπεσε λοιπόν από την επιστημολογική της διεκδίκηση να αποτελέσει τη «φυσική θεολογία» (όπως πριν απ' αυτή ήταν η γεωμετρία του Ευκλείδη).

Ο Μπουρμπακί υιοθετεί μια πραγματιστική θέση και αρκείται στην κωδικοποίηση της πρακτικής των συνόλων στο πλαίσιο μιας θεωρίας εν μέρει «αφελούς» και όχι πλήρως αξιωματικοποιημένης. Η ίδια στάση κυριαρχεί και στον ορισμό των δομών. Η ουσία της πραγματείας χρησιμοποιεί μια μη τυπική έννοια της δομής, κάτι που αποβαίνει σε μια καλή οργανωτική αρχή. Όταν όμως στο κεφάλαιο 4 της θεωρίας συνόλων ο Μπουρμπακί αναλαμβάνει, χωρίς να το πιστεύει, να κωδικοποιήσει τον ορισμό των δομών, παράγει ένα τέρας, ένα εργαλείο μη χρησιμοποιήσιμο.

Και όμως σήμερα, η πρόοδος στη θεωρία των κατηγοριών επιτρέπει να αναπτύξουμε μια αποτελεσματική προσέγγιση των δομών μέσω, για παράδειγμα, των operades. Πρόκειται για μια νέα εκδήλωση μιας αρχής που ήταν ήδη εν ισχύ στην ανάπτυξη της θεωρίας ομάδων: η μελέτη ενός σώματος μαθηματικών που έχει συσταθεί και του τρόπου γραφής του μπορεί να γίνει με μαθηματικά μέσα και να δημιουργήσει νέα μαθηματικά.

Ο στόχος του αιώνα που αρχίζει θα είναι να εγκαθιδρύσει μια νέα αρχιτεκτονική των μαθηματικών, λιγότερο ιεραρχημένη, πιο ανοικτή και όπου όλα θα εκφράζονται με βάση ένα παιχνίδι αλληλεπιδράσεων μεταξύ των κατηγοριών. Για να φέρουμε σε πέρας αυτόν το σκοπό, ο 20ός αιώνας μάς κληροδότησε ένα μαθηματικό εργαλείο κωδικοποιημένο, τυποποιημένο και με σωστή λειτουργία, έναν μακρύ κατάλογο προβλημάτων και μεθόδους για να τα προσεγγίσουμε. Το μεγαλύτερο εργοτάξιο το άνοιξε ο Γκρόθεντιεκ που αναβίωσε τη θεωρία της αβεβαιότητας του Γκαλουά. Αρχίζουμε να αντιλαμβανόμαστε τους ισχυρούς δεσμούς με τη μαθηματική φυσική (θεωρία βαθμίδος, επανακανονικοποίηση): ίσως εκεί να βρίσκεται το κλειδί της υπόθεσης Ρίμαν.

Ας κλείσουμε μ' έναν σχηματικό κατάλογο των προκλήσεων που προσφέρονται στους μαθηματικούς στις αρχές του 21ου αιώνα και που θα τους υποχρεώσουν να βγουν από το κάστρο τους:

– Μιγαδικά συστήματα και χάος: μετεωρολογία, δυναμική των γαλαξιών, μηχανική των ρευστών.

- Πρότυπα (patterns) των οποίων τα φράκταλ και οι καταστροφές του Τομ δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις.
- Πέρα από τη μοριακή βιολογία, μια αναβαθμισμένη φυσιολογία.
- Έλεγχος και τυποποίηση του εργαλείου της πληροφορικής.

