

Πρόλογος

Στην αυτοβιογραφία του, ο Μπέρτραντ Ράσελ θυμάται την κρίση που βίωσε όταν ήταν νέος:

Υπήρχε ένα μονοπάτι που οδηγούσε μέσα από χωράφια στο Νιου Σάουθγκέιτ,* και συχνά πήγαινα εκεί μόνος για να δω τη δύση του ήλιου σκεφτόμενος την αυτοκτονία. Ωστόσο δεν αυτοκτόνησα, επειδή ήθελα να μάθω περισσότερα πράγματα για τα μαθηματικά.

Ομολογουμένως λίγοι άνθρωποι βρίσκουν τέτοια απόλυτη σωτηρία στα μαθηματικά, όμως πολλοί εκτιμούν τη δύναμή τους και, με πιο κριτικό τρόπο, την ομορφιά τους. Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε εκείνους που θα ήθελαν να εξερευνήσουν κάπως λεπτομερέστερα τη μακρά και ένδοξη ιστορία των μαθηματικών.

Σε τομείς τόσο διαφορετικούς όπως η λογοτεχνία, η μουσική και η τέχνη, τα αριστουργήματα –τα σπουδαία μυθιστορήματα, οι σπουδαίες συμφωνίες, οι σπουδαίοι πίνακες– παραδοσιακά εξετάζονται ως τα καταλληλότερα και πλέον διαφωτιστικά αντικείμενα μελέτης. Έχουν γραφεί πολλά βιβλία και έχουν διδαχθεί πολλά μαθήματα σε αυτά ακριβώς τα θέματα προκειμένου να μας εξοικειώσουν με κάποια από τα πρωτοποριακά ορόσημα αυτών των αντικειμένων όσο και με τους άνδρες και τις γυναίκες που τα δημιούργησαν.

Τούτο το βιβλίο αποτελεί μια ανάλογη προσέγγιση στα μαθηματικά, όπου η πρωτοπορία δεν συντελείται σε κάποιο μυθιστόρημα ή μια συμφωνία, αλλά σε ένα θεώρημα. Συνακόλουθα, δεν πρόκειται για ένα αντιπροσωπευτικό βιβλίο μαθηματικών, στον βαθμό που δεν παρουσιάζει μια βήμα προς βήμα ανάπτυξη κάποιου κλάδου του αντικειμένου. Ούτε τονίζει την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στον προσδιορισμό πλανητικών τροχιών, στην κατανόηση του κόσμου των

* Προάστιο του Λονδίνου. (Σ.τ.Μ.)

ηλεκτρονικών υπολογιστών, ή, επιπλέον, στον ισοσκελισμό του προϋπολογισμού σας. Βεβαίως, τα μαθηματικά επέδειξαν εντυπωσιακή επιτυχία σε τέτοια εφαρμοσμένα εγχειρήματα. Όμως αυτό που οδήγησε τον Ευκλείδη ή τον Αρχιμήδη ή τον Γκέοργκ Κάντορ να αφιερώσουν τόσο πολλή από την ενέργεια και τη μεγαλοφυΐα τους σε αυτά δεν ήταν η εγκόσμια χρησιμότητά τους. Οι άνθρωποι αυτοί δεν ένιωθαν υποχρεωμένοι να δικαιολογήσουν την εργασία τους με ωφελιμιστικές εφαρμογές, όπως ούτε ο Σαίξπηρ ένιωθε υποχρεωμένος να ζητήσει συγγνώμη επειδή έγραψε ερωτικά σονέτα αντί για οδηγούς μαγικικής, ή ο Βαν Γκογκ επειδή έφτιαξε ελαιογραφίες αντί για υπαίθριες διαφημίσεις.

Στο βιβλίο αυτό θα εξερευνήσω μια χούφτα από τις πλέον σημαντικές αποδείξεις –και τα πλέον ιδιοφυή λογικά επιχειρήματα– από την ιστορία των μαθηματικών, με έμφαση στο γιατί τα θεωρήματα αυτά ήταν σημαντικά και πώς ο μαθηματικός επέλυσε, άπαξ και διά παντός, το πιεστικό επίμαχο λογικό ζήτημα. Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου έχει τρεις πρωτεύουσες συνιστώσες.

Η πρώτη είναι η ιστορική. Τα σπουδαία θεωρήματα που θα διαβάσετε εκτείνονται σε περισσότερα από 2.300 χρόνια ανθρώπινης ιστορίας. Προτού εξετάσω κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, θα θέτω το πλαίσιο περιγράφοντας την κατάσταση των μαθηματικών, και ενδεχομένως την κατάσταση του κόσμου γενικότερα, πριν από τη διατύπωση του θεωρήματος. Όπως τα πάντα έτσι και τα μαθηματικά δημιουργούνται εντός του ιστορικού πλαισίου, και έχει ενδιαφέρον να εντοπίσουμε την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης από τον Καρντάνο δύο χρόνια μετά τη δημοσίευση της ηλιοκεντρικής θεωρίας του Κοπέρνικου και δύο χρόνια πριν από τον θάνατο του Ερρίκου Η΄ της Αγγλίας, ή να δώσουμε έμφαση στον αντίκτυπο που είχε η Παλινόρθωση στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ όταν το 1661 εισήχθη σε αυτό ένας νεαρός λόγιος ονόματι Ισαάκ Νεύτων.

Η δεύτερη συνιστώσα είναι η βιογραφική. Τα μαθηματικά είναι προϊόν πραγματικών ανθρώπων, όντων με σάρκα και οστά, των οποίων η ζωή ίσως αντανακλά το στοιχείο της έμπνευσης, της τραγικότητας ή του παράδοξου. Τα θεωρήματα που περιλαμβάνονται σε αυτό το βιβλίο αναπαριστούν το έργο ενός αριθμού προσώπων, από τον εξωστρεφή Λέοναρντ Όυλερ μέχρι τον εριστικό Γιόχαν Μπερνούλι και τον πιο περπατημένο άνθρωπο της Αναγέννησης, τον Τζερόλαμο Καρντάνο. Αν κατανοήσουμε τη ζωή αυτών των διαφορετικών ανθρώπων καλύτερα, τότε θα εκτιμήσουμε περισσότερο το έργο τους.

Η τελική συνιστώσα, στην οποία κυρίως εστιάζει το βιβλίο, είναι η

δημιουργικότητα που είναι έκδηλη σε αυτά τα «μαθηματικά αριστουργήματα». Όπως ακριβώς κάποιος δεν θα μπορούσε να ελπίζει ότι θα καταλάβαινε ένα σπουδαίο μυθιστόρημα δίχως να το διαβάσει ούτε ότι θα εκτιμούσε ένα έργο τέχνης χωρίς να το δει, έτσι δεν μπορεί να περιμένει ότι θα κατανοήσει ένα σπουδαίο μαθηματικό θεώρημα χωρίς μια προσεκτική, βήμα προς βήμα ανάγνωση της απόδειξης. Η πρόσκτηση μιας τέτοιας κατανόησης απαιτεί αρκετή συγκέντρωση και προσπάθεια, και τα επόμενα κεφάλαια σκοπεύουν να χρησιμεύσουν ως οδηγός σε αυτό το εγχείρημα.

Υπάρχει κάτι το αξιοσημείωτα πάγιο σχετικά με αυτά τα μαθηματικά ορόσημα. Σε άλλους τομείς, αυτό που σήμερα είναι μόδα αύριο ξεχνιέται και περνάει στο περιθώριο. Πριν από έναν αιώνα και κάτι, ο σερ Γουόλτερ Σκοτ θεωρούνταν ένας από τους πλέον διαπρεπείς συγγραφείς της αγγλικής λογοτεχνίας· σήμερα αξιολογείται με σημαντικά λιγότερο ενθουσιασμό. Στην εποχή μας, οι διάσημοι σταρ έρχονται και παρέρχονται με ταχύτητα που κόβει την ανάσα, και ιδέες που μοιάζουν προορισμένες να αλλάξουν τον κόσμο καταλήγουν συχνά στον κάλαθο των διανοητικών αχρήστων.

Τα μαθηματικά, ασφαλώς, υπόκεινται και αυτά σε αλλαγές γούστου. Όμως ένα θεώρημα, το οποίο έχει αποδειχθεί με ορθό τρόπο εντός των αυστηρών πλαισίων της λογικής, παραμένει για πάντα θεώρημα. Η απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος από τον Ευκλείδη το 300 π.Χ. δεν έχει χάσει, με την πάροδο του χρόνου, τίποτε από την ομορφιά ή την εγκυρότητά της. Αντιθέτως, οι αστρονομικές θεωρίες ή οι ιατρικές πρακτικές στην Ελλάδα της αλεξανδρινής εποχής έχουν προ πολλού καταστεί παρωχημένες και αναφέρονται μόνο σαν ελαφρώς διασκεδαστικά παραδείγματα πρωτόγονης επιστήμης. Ο μαθηματικός του 19ου αιώνα Χέρμαν Χάνκελ το είπε με τον καλύτερο τρόπο:

Στις περισσότερες επιστήμες μια γενιά γκρεμίζει όσα έκτισε μια άλλη, και όσα θεμελίωσε ο ένας τα επαναφέρει στην προγενέστερη κατάσταση ο άλλος. Μόνο στα μαθηματικά κάθε γενιά προσθέτει μια νέα ιστορία στην παλαιά δομή.

Υπό αυτή την έννοια, καθώς εξετάζουμε τα άχρονα μαθηματικά σπουδαιών μαθηματικών, κατανοούμε τη θαυμαστά εύστοχη παρατήρηση του Όλιβερ Χέβισαϊντ: «Η λογική μπορεί να είναι υπομονετική, διότι είναι αιώνια».

Στην επιλογή αυτών των λίγων θεωρημάτων συνέβαλαν αρκετοί

παράγοντες ώστε να παρουσιαστεί ό,τι καλύτερο έχουν να επιδείξουν τα μαθηματικά. Όπως ανέφερα, το κύριο μέλημά μου ήταν να βρω επιχειρήματα ιδιαίτερα πρωτότυπα ή ευφυή. Αυτό, φυσικά, εισάγει ένα στοιχείο προσωπικού γούστου, και αναγνωρίζω ότι κάποιος άλλος συγγραφέας σίγουρα θα συνέτασσε έναν διαφορετικό κατάλογο από σπουδαία θεωρήματα. Πέρα απ' αυτό, αποτελεί ασυνήθιστη εμπειρία η από πρώτο χέρι παρατήρηση του μαθηματικού που οδηγείται μέσω μιας ευφυούς παραγωγικής διαδικασίας από τον ένα συλλογισμό στον άλλο και καθιστά ξεκάθαρο το φαινομενικά ακατανόητο. Έχει λεχθεί ότι το ταλέντο κάνει εύκολα αυτό που οι άλλοι θεωρούν δύσκολο, ενώ η μεγαλοφυΐα κάνει εύκολα αυτό που οι άλλοι θεωρούν αδύνατο. Όπως θα γίνει έκδηλο, σε ό,τι ακολουθεί στο βιβλίο, από μεγαλοφυΐα άλλο τίποτε. Στα μαθηματικά υπάρχουν γνήσια κλασικά έργα – σαν να έχουμε πολλούς πίνακες όπως τη *Μόνα Λίζα* ή πολλά θεατρικά κείμενα σαν τον *Αμλετ*.

Όμως η επιλογή των θεωρημάτων επηρεάστηκε και από άλλες παραμέτρους. Κατ' αρχάς, θέλησα να συμπεριλάβω κάποιους διαπρεπείς μαθηματικούς της ιστορίας. Για παράδειγμα, επιβαλλόταν να έχουμε δείγματα από το έργο του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Νεύτωνα και του Όυλερ. Το να παραβλέψουμε τέτοιες μορφές θα ήταν σαν να μελετούσαμε ιστορία της τέχνης χωρίς να αναφέρουμε το έργο του Ρέμπραντ ή του Σεζάν.

Επιπλέον, χάριν ποικιλίας, επέλεξα διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Οι προτάσεις που παρουσιάζω προέρχονται από τα βασίλεια της επιπεδομετρίας, της άλγεβρας, της θεωρίας αριθμών, της ανάλυσης και της θεωρίας συνόλων. Η ποικιλία αυτών των θεμάτων και οι μεταξύ τους περιστασιακές διασυνδέσεις και αλληλεπιδράσεις ενδεχομένως να προσθέσουν μια νότα φρεσκάδας σε τούτο το βιβλίο.

Θέλησα επίσης να παρουσιάσω σημαντικά μαθηματικά θεωρήματα, αντί για απλώς έξυπνα μικρά τεχνάσματα ή γρίφους. Μάλιστα, τα περισσότερα από τα μαθηματικά αποτελέσματα στο βιβλίο αυτό είτε επέλυσαν προβλήματα που παρέμεναν επί χρόνια άλυτα είτε γέννησαν ακόμη βαθύτερα ερωτήματα για το μέλλον, ή και τα δύο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ένας επίλογος, ο οποίος συνήθως θίγει ένα ζήτημα που εγείρεται από το σπουδαίο θεώρημα που προηγήθηκε και το ακολουθεί καθώς αυτό αντηχεί διαμέσου της ιστορίας των μαθηματικών.

Κατόπιν έρχεται το ερώτημα περί του επιπέδου δυσκολίας. Προφανώς, τα μαθηματικά έχουν πολλά σπουδαία ορόσημα των οποίων το

βάθος και η πολυπλοκότητα τα καθιστούν ακατανόητα σε όλους πλην των ειδικών. Θα ήταν ανόητο να συμπεριλάβω τέτοια αποτελέσματα σε ένα βιβλίο που απευθύνεται σε αναγνωστικό κοινό με στοιχειώδεις επιστημονικές γνώσεις. Τα θεωρήματα που ακολουθούν απαιτούν μόνο τα εργαλεία της άλγεβρας και της γεωμετρίας του επιπέδου που κάποιος αποκτά στο λύκειο. Οι δύο εξαιρέσεις είναι μια σύντομη χρήση της καμπύλης του ημιτόνου από την τριγωνομετρία κατά την εξέταση του έργου του Όυλερ στο Κεφάλαιο 9 και μια εφαρμογή του στοιχειώδους ολοκληρωτικού λογισμού στο έργο του Νεύτωνα στο Κεφάλαιο 7· πολλοί αναγνώστες ενδεχομένως να είναι ήδη εξοικειωμένοι με αυτά τα θέματα, ενώ, για όσους δεν είναι, δίνονται λίγες εξηγήσεις ώστε να αμβλυθούν οι δυσκολίες.

Οφείλω να τονίσω ότι δεν πρόκειται για σχολικό βιβλίο. Ασφαλώς υπάρχουν ερωτήματα που απαιτούν μαθηματική ή ιστορική εμβάθυνση, αλλά δεν μπορούν να μελετηθούν σε ένα βιβλίο σαν αυτό εδώ. Παρότι προσπάθησα να αποφύγω λανθασμένο ή ιστορικά ανακριβές υλικό, εδώ δεν ήταν ούτε η κατάλληλη στιγμή ούτε η κατάλληλη θέση για να εξεταστούν όλες οι πτυχές όλων των θεμάτων. Σε τελική ανάλυση, πρόκειται για ένα εκλαίκευτικό και όχι επιστημονικό βιβλίο.

Στη συλλογιστική αυτή, οφείλω να προσθέσω λίγα λόγια σχετικά με την αυθεντικότητα των αποδείξεων. Γράφοντας το βιβλίο, αποδείχθηκε αδύνατο να αποφύγω την ανάγκη κάποιου συμβιβασμού του πρωτότυπου συμβολισμού, της ορολογίας και της λογικής στρατηγικής που χρησιμοποίησαν οι συγγραφείς με την απαίτηση το μαθηματικό υλικό να είναι κατανοητό στον σύγχρονο αναγνώστη. Η πλήρης προσκόλληση στο πρωτότυπο θα καθιστούσε πολύ δύσκολη την κατανόηση αυτών των αποτελεσμάτων, ενώ η σημαντική απόκλιση από αυτό θα ερχόταν σε σύγκρουση με την ιστορική διάσταση του εγχειρήματός μου. Εν γένει, προσπάθησα να διατηρήσω δυνητικά ολόκληρο το πνεύμα, και κατά το δυνατόν τις λεπτομέρειες, των πρωτότυπων θεωρημάτων. Οι τροποποιήσεις που έχω εισαγάγει δεν μου φαίνονται πιο σημαντικές, για παράδειγμα, από την εκτέλεση έργων του Μότσαρτ με σύγχρονα όργανα.

Και έτσι είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε το ταξίδι μας διατρέχοντας τα μαθηματικά ορόσημα δύο χιλιετιών. Τα αποτελέσματα αυτά, όσο παλιά κι αν είναι, παρουσιάζουν μια φρεσκάδα και μια λαμπρή δεξιότητα ακόμη κι έπειτα από τόσους αιώνες. Ελπίζω ότι ο αναγνώστης θα είναι σε θέση να καταλάβει αυτές τις αποδείξεις και να αναγνωρίσει τι τις έκανε τόσο σπουδαίες. Για όσους πετύχουν σ' αυτό το εγχείρημα, περιμένω ότι θα υπάρξει όχι μόνο μια αίσθηση δέους

προερχόμενη από την αναγνώριση του μεγαλείου των άλλων, αλλά και μια αίσθηση προσωπικής ικανοποίησης από το γεγονός ότι μπορεί κανείς να κατανοήσει πράγματι τα έργα ενός δασκάλου.

Γουίλιαμ Ντάναμ
Κολάμπας, Οχάιο

