

## Εισαγωγή

Όταν οι εκδότες μου John Wiley & Sons μου πρότειναν να γράψω ένα βιβλίο με θέμα τις μεγάλες έριδες στα μαθηματικά, δεν μπορώ να πω ότι ενθουσιάστηκα από την ιδέα. Είχα παρακολουθήσει κάποια μαθηματικά προετοιμάζοντας το πτυχίο μου στη φυσική, αυτό όμως είχε γίνει πριν από πολλά χρόνια και για μεγάλο διάστημα δεν είχα ασχοληθεί καθόλου με αυτά. Επιπλέον, δεν είχα ιδέα για την ιστορία των μαθηματικών. Και το χειρότερο: η άποψή μου για τα μαθηματικά ήταν σαφώς ξεπερασμένη. Είχα την αίσθηση ότι τα μαθηματικά είναι μια ψυχρή, λογική επιστήμη όπου τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν, αν όχι γρήγορα, τουλάχιστον όμως αντικειμενικά και αποφασιστικά. Σε αντίθεση, για παράδειγμα, με την πολιτική, τη θρησκεία ή ακόμα και τις φυσικές επιστήμες, πίστευα πως δεν υπήρχε κανένα περιθώριο για ανθρώπινες συγκινήσεις και ευαισθησίες. Πώς ήταν λοιπόν δυνατόν να υπάρχουν έριδες στα μαθηματικά;

Παρ' όλα αυτά, συμβουλευτήκα έναν γνωστό μου καθηγητή μαθηματικών, και τον ρώτησα τη γνώμη του για την προοπτική ενός τέτοιου βιβλίου. Κούνησε το κεφάλι και χωρίς να το ξανασκεφτεί είπε: «Θα είσαι τυχερός αν ανακαλύψεις δυο διενέξεις όλες κι όλες».

Αυτή η άποψη ταίριαζε με όσα είχα διαβάσει παλιότερα. Ο Μπέρτραντ Ράσελ, για παράδειγμα, είχε γράψει ότι «τα μαθηματικά, αν κοιταχτούν από την κατάλληλη σκοπιά, δε χαρακτηρίζονται μόνο από την αλήθεια αλλά κι από μια υπέρτατη ομορφιά – μια ομορφιά ψυχρή και απέριττη σαν αυτή των γλυπτών, χωρίς καμιά επίκληση σε οποιοδήποτε τμήμα της πιο αδύναμης φύσης μας, χωρίς τα εντυπωσιακά εξωτερικά γνωρίσματα της ζωγραφικής ή της μουσικής, υπέρτατα αγνά και ικανά για την άτεγκτη τελειότητα που μόνο η υψηλότερη μορφή τέχνης είναι σε θέση να επιδείξει»<sup>1</sup>.

Δεν είναι παράξενο πώς βρίσκουμε συνεχώς αυτό που θέλουμε να βρούμε; Ψάχνοντας παραπέρα έπεσα πάνω σε μια ανάλογη ιδέα ενός άλλου από τους αγαπημένους μου συγγραφείς, του Μόρις Κλάιν: «Πα-

---

1. Russell, Bertrand, *Mysticism and Logic*, Νέα Υόρκη: W.W. Norton, 1929, σελ. 57. (Δοκίμιο γραμμένο το 1902.)

θιασμένα μυαλά που επιχειρούν να θεσπίσουν νέα συστήματα σκέψης με βάση αδιαφιλονίκητες γνώσεις ελκύστηκαν από τη βεβαιότητα των μαθηματικών, αφού οι μαθηματικές αλήθειες... δεν αμφισβητήθηκαν ποτέ ούτε υπήρξαν αντικείμενο της παραμικρής αμφιβολίας από μέρους των αληθινών διανοουμένων. Επιπλέον, οι μαθηματικές αποδείξεις φέρνουν μαζί τους μια απόλυτη ασφάλεια, μια επιβεβαίωση που δεν επιτεύχθηκε ποτέ, ούτε από τις φυσικές επιστήμες ούτε από τη φιλοσοφία ούτε από τη θρησκεία»<sup>2</sup>.

Ήμουν έτοιμος να δώσω μια οριστική αρνητική απάντηση στον εκδότη μου. Ευτυχώς όμως εκείνος επέμεινε κι έτσι συνέχισα το ψάξιμο. Βρήκα ένα μεταγενέστερο βιβλίο του Κλάιν με τίτλο *Μαθηματικά: Η απώλεια της βεβαιότητας* (1980), που αφηγούνται μια ολότελα διαφορετική ιστορία. Συνέχισα να ψάχνω. Άρχισα να διαπιστώνω ότι το αντικείμενο των μαθηματικών άφηνε περιθώρια και για αμφισβητήσεις και για αντιπαραθέσεις.

Σταδιακά, ενώ συνέχιζα να διαβάζω, να μελετώ και να συζητώ με άλλους, άρχισα να σχηματίζω την άποψη ότι οι μαθηματικοί, όπως και οι πολιτικοί και οι κληρικοί, είναι άνθρωποι, και με αυτή τους την ιδιότητα είναι επιρρεπείς στις ίδιες συγκινήσεις που διατρέχουν το φάσμα από την προκατάληψη και το φθόνο μέχρι τη φιλοδοξία, την υπερηφάνεια, την αντιπαλότητα μεταξύ αδελφών και την ακατανίκητη επιθυμία να έχουν πάντα δίκιο. Σίγουρα εδώ θα υπήρχε κάτι το ενδιαφέρον.

Καθώς συνέχιζα την έρευνα, το πρόβλημα δεν ήταν πια η έλλειψη αλλά η υπερβολική ποσότητα στοιχείων. Έπρεπε να διαλέξω ανάμεσα σε πολύ περισσότερες έριδες από όσες χρειαζόμουν για το βιβλίο. Διάλεξα ως σημείο εκκίνησης τα μέσα του 16ου αιώνα, όταν έλαβε χώρα μια μεγάλη σύγκρουση ανάμεσα σε δυο ξεχωριστούς ανθρώπους.

Στην ιστορία υπεισέρχεται ένα βιβλίο –το *Ars Magna* ή *Οι κανόνες της άλγεβρας*– που χαρακτηρίστηκε ως ένα από τα επιστημονικά αριστουργήματα της εποχής. Του αποδίδεται σημαντική συνεισφορά στη νέα ώθηση που έλαβαν οι θετικές επιστήμες την περίοδο της Αναγέννησης. Στο βιβλίο περιλαμβάνονταν και μια μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων τρίτου και τέταρτου βαθμού. Δε θα υπήρχε κανένα πρόβλημα, αν ο συγγραφέας του, ο Τζιρόλαμο Καρντάνο, δεν είχε κατηγορηθεί από έναν άλλο Ιταλό, τον Ταρτάλια, ο οποίος ισχυριζόταν όχι μόνο ότι η λύση της μιας από τις δύο εξισώσεις ήταν δική του, αλλά και ότι ο Καρντάνο του είχε υποσχεθεί –ως χριστιανός και τίμιος άνθρωπος– ότι δε θα τη δημοσίευε πριν τη δημοσιεύσει πρώτος ο Ταρτά-

2. Kline, 1953, σελ. 105.

λια. Ήταν ένας περίφημος καβγάς που μου χρησίμεψε ως ένα πολύ φυσικό σημείο εκκίνησης για τη νέα μου περιδιάβαση.

Εντελώς διαφορετικής φύσης ήταν η διένεξη του Ντεκάρτ με τον Φερμά, που δίχασε την επιστημονική κοινότητα της Γαλλίας του 17ου αιώνα σε φανατικούς υποστηρικτές του ενός και του άλλου. Εδώ δεν τέθηκε θέμα για το αν αυτός που δημοσίευσε είχε το δικαίωμα να το κάνει αλλά για το αν αυτά που δημοσίευσε ήταν σωστά και σημαντικά. Οι διαφορές στο χαρακτήρα και στη νοοτροπία των δυο πρωταγωνιστών έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμάχη που ωστόσο παρέμεινε κατά κύριο λόγο σε καθαρά επιστημονικό πλαίσιο.

Γνώριζα από την προηγούμενη εργασία μου σχετικά με τις επιστημονικές έριδες ότι μια σημαντική πηγή διενέξεων ήταν τα θέματα προτεραιότητας. Είναι σαφές ότι οι μαθηματικοί δεν επέλεξαν αυτό τον τομέα για το χρήμα αλλά γιατί, αν καταφέρουν να σημειώσουν κάποια σημαντική πρόοδο, θέλουν η συμβολή τους να τους αναγνωριστεί. Αυτό ισχύει σήμερα όπως ίσχυε και κατά το 17ο αιώνα. Η σύγκρουση Νεύτωνα-Λάιμπνιτς ήταν μια τέτοια περίπτωση διαμάχης για την προτεραιότητα. Ο Νεύτων επινόησε πρώτος τον απειροστικό λογισμό αλλά τον κράτησε για τον εαυτό του. Ο Λάιμπνιτς ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε σχετικά με τον απειροστικό λογισμό, η δική του μέθοδος ήταν κάπως πιο εύχρηστη και εφαρμόστηκε πρώτη. Σε ποιον ανήκει η αναγνώριση της προτεραιότητας; Πολέμησαν άγρια και ο ένας –χρησιμοποιώντας μεθόδους που και τότε χαρακτηρίζονταν ύποπτες– κυριάρχησε. Το πώς αντέδρασαν οι χώρες τους είναι μια άλλη ιστορία.

Είχα πάρει φόρα. Ανακάλυπτα κάθε λογής έριδες, τη μία μετά την άλλη. Κάποιες είχαν τις ρίζες τους σε καθαρά προσωπικές αντιπάθειες: χαρακτηριστικό παράδειγμα οι Ελβετοί αδελφοί Μπερνούλι, που συγκαταλέγονται μεταξύ των κορυφαίων μαθηματικών όλων των εποχών (κεφ. 4). Η ιστορία ξεκίνησε μάλλον ειρηνικά: ο ένας από τους δυο αδελφούς, ο μεγαλύτερος, ήταν ο δάσκαλος του μικρότερου. Σταδιακά όμως αναπτύχθηκε ανάμεσά τους μια τρομακτική αντιπαλότητα σχετικά με το ποιος από τους δυο είναι ο καλύτερος στα μαθηματικά. Η έχθρα τους πήρε μορφή δημόσιας διαμάχης με εκατέρωθεν προκλήσεις. Όταν ο γιος ενός από τους δυο εξελίχτηκε και αυτός σε ικανό μαθηματικό, σε σημείο που να γίνεται απειλητικός, έγινε και αυτός αντικείμενο της ίδιας μεταχείρισης. Ωστόσο, δεν αποκλείεται ο ανταγωνισμός τους να ώθησε αυτούς τους μαθηματικούς στο να βελτιώσουν τις μεθόδους τους και να παραγάγουν καλύτερες εργασίες απ' ό,τι θα έκαναν αν εργάζονταν ανενόχλητοι.

Μια διαμάχη μπορεί ακόμα να ξεκινήσει από τις ολότελα διαφορε-

τικές απόψεις που ενδέχεται να έχουν δυο άτομα για το ίδιο θέμα. Αυτό συνέβη ανάμεσα στον Τζέιμς Τζόζεφ Σουλβέστερ, αξιοσέβαστο Βρετανό μαθηματικό του 19ου αιώνα, και τον Τόμας Χένρι Χάξλεϊ, εξίσου διάσημο Βρετανό επιστήμονα. Ο Χάξλεϊ είχε σημαντική συνεισφορά στη ζωολογία, τη γεωλογία και την ανθρωπολογία, φαίνεται όμως ότι στη θέση των μαθηματικών είχε κάποιο κενό. Έτσι ισχυρίστηκε ότι «τα μαθηματικά δεν έχουν καμιά σχέση με την παρατήρηση, τον πειραματισμό, την επαγωγή, την αιτιότητα». Ότι, εν ολίγοις, ήταν «άχρηστα από επιστημονική άποψη» (κεφ. 5).

Οι μαθηματικοί θίχτηκαν και αισθάνθηκαν ότι ο Χάξλεϊ θα έπρεπε να λάβει μια απάντηση. Επέλεξαν ως υπερασπιστή τους τον Σουλβέστερ. Η διαμάχη ανάμεσα στον Σουλβέστερ και τον Χάξλεϊ επικεντρώθηκε γύρω από τις διαφορετικές θεωρήσεις τους για την επιστήμη. Οι συζητήσεις και τα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν επηρέασαν σημαντικά τη διδασκαλία τόσο των μαθηματικών όσο και των θετικών επιστημών στη Μεγάλη Βρετανία και στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Όλες οι διαμάχες στις οποίες αναφέρθηκα μέχρι τώρα έλαβαν χώρα ανάμεσα σε ανταγωνιστές που έχαιραν υψηλής εκτίμησης και κατείχαν υψηλές θέσεις. Στην περίπτωση του Γκέοργκ Κάντορ, η μορφή της μάχης ήταν εντελώς διαφορετική. Ο ένας από τους αντιπάλους ήταν σε σαφώς μειονεκτική θέση (κεφ. 6), έτυχε όμως να είναι ένας από τους ευρηματικότερους μαθηματικούς στην ιστορία της επιστήμης. Αυτό αποτελούσε ταυτόχρονα τη δύναμη και την αδυναμία του. Ο Κάντορ είχε την τύχη να σπουδάσει κοντά σε τρεις από τους διασημότερους Γερμανούς μαθηματικούς. Υπήρξε ωστόσο άτυχος, αφού ο ένας από τους τρεις ήταν ο Λεοπόλδος Κρόνκερ, πασίγνωστος αλλά υπερβολικά συντηρητικός καθηγητής μαθηματικών. Τα βάσανα του Κάντορ άρχισαν όταν τόλμησε να στραφεί προς κάποιες ανορθόδοξες κατευθύνσεις.

Στην πραγματικότητα ο Κάντορ άνοιξε ένα νέο, ολότελα ανεξερεύνητο κόσμο στα μαθηματικά. Δημιούργησε τη θεωρία των συνόλων, μια εντελώς νέα έννοια που ανέτρεπε τις αρχές της κλασικής αριθμητικής. Το άπειρο επί αιώνες θεωρούνταν ένα ακατανόητο και άπιαστο αίνιγμα· ο Κάντορ δεν υποστήριξε απλώς την ύπαρξη ενός πραγματικού και συγκεκριμένου απείρου, αλλά επινόησε τρόπους να το χειριστεί από μαθηματική σκοπιά. Όμως, όσο πιο θαρραλέα ήταν τα βήματά του τόσο πιο κοντά φάνταζαν ως «μαθηματική παράνοια»<sup>3</sup> στα μάτια του Κρό-

3. Ο όρος *μαθηματική παράνοια* χρησιμοποιήθηκε από τον Έρικ Τεμπλ Μπελ, σημαντικό ιστορικό των μαθηματικών, στις αρχές του 20ού αιώνα. Μήπως είναι υπερβολικός; Θα το ανακαλύψουμε στο κεφάλαιο 6.

νεκερ, του πρώην φίλου και υποστηρικτή του. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισε ο Κάντορ στην προσπάθειά του να επιβάλει τα τολμηρά νέα μαθηματικά του, αλλά και να προστατέψει τη φήμη του, μας αφηγούνται μια σπαραξικάρδια ιστορία αντάξια καλής σαπουνόπερας.

Τις πρώτες μέρες της θεωρίας των συνόλων ο Κάντορ χρησιμοποίησε μάλλον αποσπασματικές μεθόδους για τον προσδιορισμό των στοιχείων με βάση τα οποία θα τη θεμελιώνει, αφήνοντάς την ανοικτή στις επιθέσεις. Έτσι ο Κρόνεκερ δεν ήταν ο μόνος που άσκησε κριτική στο έργο του Κάντορ.

Σε μια προσπάθεια να ενισχύσει τη θεωρία των συνόλων, ένας νεαρός Γερμανός μαθηματικός, ο Ερνστ Φρίντριχ Φέρντιναντ Τσερμέλο, επινόησε ένα καθοριστικής σημασίας στοιχείο, το οποίο, σύμφωνα με ορισμένους μαθηματικούς, έλυne το πρόβλημα. Το επίσημο όνομά του ήταν «αξίωμα της επιλογής», και με τη σειρά του πυροδότησε έναν καταϊγισμό αντιδράσεων, έτσι που κάποιος ιστορικός των μαθηματικών το αποκάλεσε «το περιβόητο αξίωμα»<sup>4</sup>. Μεταξύ αυτών που αντιτάχθηκαν με το μεγαλύτερο σθένος σε αυτό το αξίωμα ήταν και ο Γάλλος Εμίλ Μπορέλ. Η ανταλλαγή επιχειρημάτων μεταξύ Τσερμέλο και Μπορέλ, αλλά και μεταξύ των οπαδών τους, συνέθεσαν κάποιες από τις πιο ενδιαφέρουσες σελίδες στην ιστορία της θεωρίας των συνόλων (κεφ. 7).

Για ένα διάστημα φαινόταν πως όλα θα μπορούσαν να ερμηνευτούν μέσω της θεωρίας των συνόλων, ότι η θεωρία των συνόλων θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση όλων των μαθηματικών. Όμως, το 1901, ο Μπέρτραντ Ράσελ –έννας γνωστός Βρετανός φιλόσοφος που είχε στραφεί στα μαθηματικά– έθεσε ένα απλό ερώτημα που συγκλόνισε τα θεμέλια της θεωρίας των συνόλων και ό,τι αντιπροσώπευε στον ευρύτερο κόσμο των μαθηματικών. Το ερώτημα του Ράσελ δεν επιδεχόταν απάντηση και συνεπώς ήταν ένα παράδοξο, μια αντίφαση.

Αυτό το παράδοξο και άλλα, παρόμοια με αυτό, είχαν μια ποικιλία επιπτώσεων, ιδίως σε όσους ενδιαφέρονταν για τα θεμέλια των μαθηματικών, αφού έμοιαζαν να δείχνουν ότι ολόκληρη η δομή των μαθηματικών ήταν ασταθής ή ότι πατούσε σε ασταθή θεμέλια. Η εικόνα που εμφάνιζαν τα μαθηματικά ως ακριβής, λογική και βέβαιη επιστήμη είχε

---

4. Ονομάζουμε στα μαθηματικά *αξίωμα* μια πρόταση την οποία αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη και στην οποία οικοδομούμε ένα ολόκληρο λογικό σύστημα. Η κρατούσα άποψη είναι ότι αυτή η πρόταση οφείλει να είναι «προφανής» ή «αυτονόητη».

σαφώς διαβρωθεί. Γύρω στις αρχές του 20ού αιώνα, μια σημαντική μερίδα μαθηματικών άρχισε να διεξάγει έρευνες σε αυτή την κατεύθυνση. Χωρίστηκαν όμως σε διαφορετικές, ανταγωνιστικές μεταξύ τους ομάδες που σταδιακά συσπειρώθηκαν σε τρεις βασικές τάσεις ή σχολές.

Η πρώτη σχολή για την οποία θα μιλήσουμε είναι ο λογικισμός, που ο κύριος υποστηρικτής του ήταν ο Μπέρτραντ Ράσελ (κεφ. 8). Ο Ράσελ πίστευε ότι τα θεωρητικά μαθηματικά μπορούν να οικοδομηθούν πάνω σε μια μικρή συλλογή από θεμελιώδεις λογικές έννοιες και ότι όλες τους οι προτάσεις μπορούν να προκύψουν από έναν περιορισμένο αριθμό βασικών λογικών αρχών. Έτρεφε την ελπίδα ότι με αυτό τον τρόπο θα αντιμετώπιζε και τα παράδοξα υιοθετώντας κάποιες νέες προσεγγίσεις στο πρόβλημα. Όμως ο Ράσελ είχε στηρίξει ένα μεγάλο μέρος του έργου του στη θεμελίωση που παρείχε η θεωρία των συνόλων του Κάντορ. Από την άλλη, ο Ανρί Πουανκαρέ, ο διεθνούς φήμης Γάλλος μαθηματικός, είχε καταστεί, μετά το θάνατο του Κρόνεκερ, το 1891, ο υπ' αριθμόν ένα πολέμιος των μαθηματικών του Κάντορ. Αποτέλεσμα: Ο Πουανκαρέ στράφηκε εναντίον του Ράσελ και του λογικισμού. Παρόλο που οι δυο άνδρες έτρεφαν αμοιβαίο σεβασμό, δε δίστασαν να επιτεθούν ορμητικά ο ένας εναντίον των θέσεων του άλλου.

Οι άλλες δυο σχολές που δημιουργήθηκαν την ίδια περίπου εποχή ήταν ο ιντουισιονισμός (διαισθητισμός) και ο φορμαλισμός, με ηγέτες τον Λάιτσην Έγκμπερτους Γιαν Μπράουερ και τον Νταβίντ Χίλμπερτ αντίστοιχα. Σε αυτή τη μάχη, κάθε λογής διαφορές ήρθαν στο προσκήνιο – μεταξύ άλλων και οι εθνικότητες των πρωταγωνιστών. Όταν η διαμάχη διευρύνθηκε τόσο, ώστε να γίνεται και στρατολόγηση υποστηρικτών, ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, που επέλεξε να παραμείνει ουδέτερος, την παρομοίασε με τη *Βατραχομουμαχία* (κεφ. 9).

Στο τελευταίο κεφάλαιο ασχολούμαστε με ένα ερώτημα που προβλημάτισε και ταλάνισε τους μαθηματικούς επί αιώνες: Τα μαθηματικά επινοούνται ή ανακαλύπτονται; Παρόλο που το ερώτημα είναι και από μόνο του ενδιαφέρον, ανοίγει την πόρτα και στην αιώνια διαμάχη σχετικά με το πώς πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά.

Το ανά χείρας λοιπόν βιβλίο ασχολείται με τις έριδες στα μαθηματικά. Διαβάζοντάς το θα διαπιστώσουμε ότι τα μαθηματικά δεν είναι τελικά ούτε τόσο αντικειμενικά ούτε τόσο βέβαια όσο τα θεωρούμε συνήθως και ότι οι μαθηματικοί υπόκεινται στις ίδιες απογοητεύσεις και στις ίδιες ευτελείς συγκινήσεις, όπως όλοι μας.

Ίσως η διαφορά ανάμεσα σε αυτά που βλέπει το κοινό και σε αυτά που αναδεικνύει αυτό το βιβλίο μπορεί να εξηγηθεί με μια παρομοίωση του Ρόιμπεν Χερς. Ο Χερς, καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπι-

στήμιο του Νιου Μέξικο, παρομοιάζει τα μαθηματικά με ένα πολυτελές εστιατόριο. Στο μπροστινό μέρος, στην αίθουσα του εστιατορίου, οι πελάτες σεβίρονται με καθαρά, προσεγμένα μαθηματικά πιάτα. Στο πίσω μέρος, στην κουζίνα, οι μαθηματικοί μαγειρεύουν τις νέες τους γνώσεις σ' ένα ακατάστατο, χαοτικό περιβάλλον, όλο νεύρα, αταξία, καβγάδες κι έναν αχταρμά από αποτυχίες και επιτυχίες<sup>5</sup>. Εμείς εδώ θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο πίσω μέρος του εστιατορίου: την κουζίνα.

---

5. Hersh, Reuben, *What Is Mathematics, Really?*, Νέα Υόρκη: Oxford University Press, 1997, σελ. 35-37.