

## Αριθμός

Η ιστορία των μαθηματικών αρχίζει το 532 π.Χ., τη χρονιά που γεννήθηκε ο Πυθαγόρας. Έχοντας εγκαταλείψει τη Σάμο προκειμένου να γλιτώσει από την τυραννία του Πολυκράτη, ο Πυθαγόρας ταξίδεψε στην Αίγυπτο, όπου «έμαθε τους αριθμούς και τις μετρήσεις από τους Αιγύπτιους και έμεινε έκθαμβος από τη σοφία των ιερέων», όπως και πολλοί άλλοι ευεπηρεάστοι νεαροί Έλληνες. Στη συνέχεια εγκαταστάθηκε στη νότια Ιταλία· άρχισε να διδάσκει και γρήγορα προσέλυσε μαθητές. Πολύ λίγα είναι γνωστά από πρώτο χέρι για τη ζωή του, εκτός από το ότι οι σύγχρονοι του τον θαύμαζαν. Τίποτα γραμμένο από τον ίδιο δεν έχει απομείνει. Το όνομά του διασώθηκε σε πείσμα της φθοράς του χρόνου μέσα από διάφορα γραμματειακά ευρήματα. Η ένταξη στον πυθαγόρειο κύκλο βασιζόταν ολοφάνερα στη μαθηματική ικανότητα. Η μυστικότητα ήταν υποχρεωτική, ενώ επιβάλλονταν και διατροφικοί περιορισμοί: τα κουκιά ήταν απαγορευμένα. Τα νέα μέλη ήταν υποχρεωμένα να σιωπούν για αρκετά χρόνια, τακτική που ακόμα και σήμερα θεωρείται εξαιρετική από πολλούς δασκάλους, και αυτό το διάστημα έπρεπε να το αφιερώσουν στο διαλογισμό και το στοχασμό. Κάποια από τα μέλη της πυθαγόρειας σχολής έβλεπαν τον έξω κόσμο σαν φυλακή, σαν μια σπηλιά γεμάτη σκιές που τρεμοσβήνουν και θαμπές θηριώδεις μορφές. Επιτρέψτε να προσθέσω σ' αυτή τη συγκεχυμένη αλλά στατική σκηνή τις μακρινές αναλαμπές μιας ανυπέρβλητης μαθηματικής ενόρασης.

Μέχρι τα μέσα του 20ού αιώνα η άποψη ότι για τα μαθηματικά, όπως και για οτιδήποτε άλλο, οι Έλληνες ήταν οι πρώτοι διδάξαντες δεν χρειαζόταν ιδιαίτερη υπεράσπιση. Με τα χέρια τους περασμένα φιλικά γύρω από όλους τους ώμους που φορούσαν χλαμύδες, οι κλασικιστές, που είχαν ξοδέψει χρόνια προσπαθώντας να κατακτήσουν τις καταχθόνιες εφιαλτικές ελληνικές γραμματικές κλίσεις, συμπέραιναν με

φυσικότητα ότι «οι Έλληνες ήταν συνάδελφοι από άλλο πανεπιστήμιο». Η ιστορία της αρχαίας Εγγύς Ανατολής βρέθηκε στο προσκήνιο τον περασμένο αιώνα, με τους μεγάλους ερευνητές να εντυφούν στις σφηνοειδείς πινακίδες, προσπαθώντας να ανασυστήσουν τη ζωή των αρχαίων αυτοκρατοριών που μέχρι εκείνη τη στιγμή τις είχε καταβροχθίσει το αδιαπέραστο πριν. Ανακάλυψαν αξιοθαύμαστα πράγματα, μια ολόκληρη ιστορία πριν από την κλασική ιστορία, βρήκαν αποδείξεις ότι άντρες και γυναίκες είχαν χρησιμοποιήσει και αγαπήσει τα μαθηματικά σε χρόνους πριν από την αρχή του χρόνου. Νεολιθικά σχήματα σκαλισμένα σε τσεκούρια δείχνουν ότι η καταγωγή των μαθηματικών βρίσκεται σε ένα απίθανα μακρινό παρελθόν και ότι άνθρωποι των σπηλαίων, με τα τριχωτά τους κορμιά καλυμμένα με βρώμικες γούνες, χάραζαν τα ονόματα των αριθμών στις λαβές των τσεκουριών τους, καθώς το λίπος του βίσωνα τσιτσίριζε στη φωτιά. Και γιατί όχι; Όπως και η ίδια η γλώσσα, τα μαθηματικά αποτελούν κληρονομιά του είδους.

Το βάρος αυτών των εξαιρετικά μακρινών εποχών τώρα εξαφανίζεται. Βρισκόμαστε περίπου έξι αιώνες πριν από τη γέννηση του Χριστού. Οι Έλληνες είναι έτοιμοι να αρχίσουν να διαγκωνίζονται σε όλους τους διαδρόμους του πολιτισμού. Δίνουν την εντύπωση ότι γνωρίζουν τα πάντα και ότι τα γνώριζαν εξαρχής. Ωστόσο, ήδη οι Βαβυλώνιοι κατείχαν ένα αξιοσημείωτο σώμα σύνθετης μαθηματικής γνώσης. Ήταν απaráμιλλοι στις αστρονομικές παρατηρήσεις και είχαν θέσει πολλά ουράνια φαινόμενα κάτω από τον έλεγχο αυστηρών μαθηματικών τεχνικών. Ήταν εξαιρετικά ευφυείς. «Βρήκα μια πέτρα, αλλά δεν τη ζύγισα» σημείωνε ένας γραφέας. «Μετά ζύγισα έξι φορές το βάρος της, πρόσθεσα δύο γκιν και μετά πρόσθεσα το ένα τρίτο του ενός εβδόμου πολλαπλασιασμένο με το εικοσιτέσσερα. Το ζύγισα. [Το αποτέλεσμα ήταν] ένα μάνα». «Ποιο ήταν», ρωτάει τώρα ο γραφέας τους μαθητές του με τα λαδωμένα μαλλιά, «το αρχικό βάρος της πέτρας;» Οι μαθηματικοί μπορούν να δουν ένα πολύ οικείο πρόσωπο να προβάλλει μέσα από τα προβλήματα ενός βαβυλώνιου γραφέα – το δικό τους πρόσωπο, φυσικά πανταχού παρόν και απaráλλαχτο.

Παρόλα αυτά, εκείνοι οι κλασικιστές που έπιναν με μικρές γουλιές το τσέρι τους στο σαλόνι του χρόνου είχαν τελικά δίκιο. Οι Έλληνες ήταν εκεί από την αυγή των μαθηματικών.

Οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3,... αρχίζουν από το ένα και συνεχίζουν στο διηνεκές, με τις ντελικάτες τρεις τελείες των μαθηματικών να υποδη-

λώνουν μια ατέρμονη ακολουθία. Μόλις κάποιος επιχειρήσει να βάλει τέρμα στους φυσικούς αριθμούς, κάποιος άλλος θα βρει τρόπο να το ξεπεράσει, προσθέτοντας για παράδειγμα μια μονάδα στον τελευταίο αριθμό. Οι αριθμοί δεν είναι μόνο άπειροι, αλλά έχουν και μια υπέροχη ποικιλία. Όταν, λίγο πριν πεθάνει, ο μεγαλοφυής Ινδός Σρινιβάσα Ραμανουτζάν κειτόταν σε ένα λονδρέζικο νοσοκομείο, με τους παγωμένους αγγλικούς χειμώνες που κατέτρωγαν τα πνευμόνια του να οδηγούν τώρα τη ζωή του στο τέλος της, τον επισκέφθηκε ο φίλος του μαθηματικός Γκ. Χ. Χάρντντ. Παραλυμένος από συστολή, το μόνο που ο Χάρντντ σκέφτηκε ήταν να ξεφουρνίσει τον αριθμό του ταξί που τον είχε φέρει στο νοσοκομείο – 1729.

«Δεν μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρον αριθμός» είπε.

«Α όχι, Χάρντντ» αποκρίθηκε ο Ραμανουτζάν. «Είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους».

Και έτσι είναι:  $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ . Δεν υπάρχει μικρότερος αριθμός που να έχει αυτή την ιδιότητα. Αυτή η ιστορία έγινε διάσημη. Κανένας δεν ξέρει τι ακριβώς σημαίνει, αλλά κάθε μαθηματικός καταλαβαίνει γιατί λέγεται.

Όπως ο Ραμανουτζάν, οι Πυθαγόρειοι είχαν ξετρελαθεί με την ανεξάντλητη ποικιλία των φυσικών αριθμών, τις προσωπικότητές τους. Ήταν γοητευμένοι από τους 1, 3, 6 και 10, γιατί αυτοί οι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν γεωμετρικά ως τρίγωνα που σχηματίζονται από τόσα σημεία όσα δηλώνει ο αριθμός. Αντιλαμβάνονταν τη σημασία των αριθμών που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και το ένα – των πρώτων αριθμών, όπως οι 2, 3, 5, 7 και 11· και μπορεί κάλλιστα να γνώριζαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι θεμελιώδεις, σπαρμένοι σαν σκοτεινά ρουμπίνια στην ωχρή πανοπλία των συνηθισμένων αριθμών. Ανακάλυψαν ότι ορισμένοι αριθμοί, όπως οι 6, 28 και 496, μπορούσαν να εκφραστούν ως άθροισμα των διαιρετών τους. Ζούσαν σε σπηλιές – δηλαδή έτσι λέει ο μύθος – και καθισμένοι οκλαδόν εκεί μέσα, με μια στοίβα βότσαλα στην ποδιά τους, βρήκαν ότι υπάρχουν τετράγωνοι και τρίγωνοι αριθμοί<sup>1</sup>, και επίσης φιλικές σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς,

1. Χρειάζονται τρία βότσαλα για να φτιαχτεί ένα τρίγωνο και αν θέλουμε να φτιάξουμε ένα μεγαλύτερο, έτσι ώστε κάθε βότσαλο να ισαπέχει από τα γειτονικά του, χρειάζονται έξι, ενώ για ένα ακόμα μεγαλύτερο δέκα. Οι τρίγωνοι αριθμοί είναι 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 κ.λπ. (Σ.τ.Μ.)

όπως όταν καθέννας από δύο αριθμούς είναι το άθροισμα των διαιρετών του άλλου ή όταν το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγώνων αριθμών, όπως το 3 και το 6, είναι τετράγωνος αριθμός ή ακόμα στις ακολουθίες από μια σειρά αριθμών σε μία άλλη· και μέσα σ' όλα αυτά, καθώς το λάδι έσταζε από τα δαδιά τους, μεταχειρίζονταν τους φυσικούς αριθμούς σαν παίχτες, σοβαρούς αλλά όχι αγέλαστους, με την ατελείωτη περιέργειά τους να φτάνει κάποιες στιγμές σε ένα είδος πνευματικής έκστασης. Η διαφορά από τους βλοσυρούς γραφείς και λογιστές της αρχαίας Εγγύς Ανατολής, που μοχθούσαν δεμένοι στον αυστηρά χρησιμοθηρικό άξονα ενός εμπορικού πολιτισμού, είναι κάτι παραπάνω από εμφανής.

Τι τους ένοιαζαν τους Πυθαγόρειους οι τερατώδεις πυραμίδες κάποιου φαράω ή η μονόφθαλμη σφίγγα με το επίμονο βλέμμα; Αυτοί ήταν μαθηματικοί.

Ήταν δεισιδαίμονες; Φυσικά, αλλά ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι ήταν αφοσιωμένοι σε μια υψηλότερη απόκοσμη σφαίρα. Αυτό ήταν που τους έκανε διαφορετικούς. Με τα γεμάτα φλέβες χέρια του να διαγράφουν κύκλους στην ομίχλη, ο Πυθαγόρας έφτασε να πιστεύει στους αριθμούς, στην υπερφυσική αρμονία τους και στις παράξενες συμμετρίες τους. «Ο αριθμός είναι η πρώτη αρχή», δήλωνε, «κάτι που δεν μπορεί να οριστεί, ακατανόητο, και που εμπεριέχει όλους τους αριθμούς». Τον αριθμό ένα οι Πυθαγόρειοι τον ονόμασαν μονάδα και ορισμένες φορές φαίνονταν να προτείνουν ότι οι φυσικοί αριθμοί θα έπρεπε να υπαχθούν σε μια ανιαρή διαδικασία σύμφωνα με την οποία όλοι οι αριθμοί θα μπορούσαν να παραχθούν από τη μονάδα· ένας τερατώδης πολλαπλασιαστικός τρόπος παραγωγής αριθμών. «Και η πρώτη αρχή των αριθμών είναι ουσιαστικά η πρώτη μονάδα, μια αρσενική μονάδα, που γεννά σαν πατέρας όλους τους άλλους αριθμούς». Οι αριθμοί δύο, τρία και τέσσερα μπαίνουν στην πυθαγόρεια λογική έχοντας τη μυρωδιά του πρώτου, ο αριθμός δύο επειδή είναι παχουλός και θηλυκός και το τρία γιατί υποδηλώνει μια επιστροφή στο αρσενικό στοιχείο, με το τρίγωνό του να μοιάζει, όταν αντιστραφεί (η βάση πάνω, το ύψος κάτω), σαν ένα ζευγάρι φαρδεΐς ώμοι που κατεβαίνουν στους αντρικούς βουβώνες. Ο αριθμός τέσσερα αξίζει να προκαλέσει εορτασμούς – αν και δεν έχω ιδέα γιατί, εκτός ίσως από το γεγονός ότι το ένα, το δύο, το τρία και το τέσσερα έχουν άθροισμα το δέκα, απ' όπου η σειρά των αριθμών ξανααγυρίζει στο ένα, αφού το έντεκα είναι το

άθροισμα του ένα και του δέκα. Το δέκα ήταν για τους Πυθαγόρειους το αντικείμενο του ιερού όρκου που δινόταν τις νύχτες, με κραυγές κουκουβάγιας να αντηχούν, στο όνομα εκείνου που «έδωσε στην ψυχή μας την τετρακτύν, η οποία είναι πηγή αέναης φύσης που ρίζες έχει».

Ημιπαράφρων, φαντάζομαι, και εκστατική, η πυθαγόρεια σκέψη μάς δίνει την ευκαιρία να ατενίσουμε τα βάθη του ασυνείδητου τύπου της προέλευσης των μαθηματικών, όπου οι φυσικοί αριθμοί φαίνονται όπως θα πρέπει να φαίνονταν στις αρχές του χρόνου, δηλαδή σαν μια γεμάτη δύναμη ερωτική όψη της ίδιας της δημιουργίας. «Ο αριθμός», έγραψαν οι Πυθαγόρειοι, «είναι η ουσία όλων των πραγμάτων». Ο χρόνος σκόρπισε τους Πυθαγόρειους και χάλασε την αίσθηση του παιχνιδιού που είχαν, ωστόσο η ιδέα ότι ο αριθμός είναι η ουσία των πάντων δεν έχασε καθόλου τη συναρπαστική πνευματική της δύναμη. *Αριθμός; Και ουσία των πάντων; Όλων των πραγμάτων; Οι Έλληνες άκουγαν αυτές τις υπερφυσικές, μυστηριώδεις λέξεις προσπαθώντας να τους δώσουν νόημα, αλλά χρειάστηκε να σκεπαστούν από χόμα τα μνημεία της αρχαιότητας πριν διεισδύσουν πάλι στη γεμάτη αυτοπεποίθηση αυτοσυνείδηση του μαθηματικού. Όταν ο Γαλιλαίος κήρυξε τη μεγάλη επιστημονική επανάσταση της Δύσης, λέγοντας ότι το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών, προωθούσε πάλι αυτή την πυθαγόρεια σκέψη, αυτή την πυθαγόρεια ρήση.*

Οι Πυθαγόρειοι ποτέ δεν κατάφεραν να εξηγήσουν τι εννοούσαν όταν έλεγαν ότι ο αριθμός είναι η ουσία των πάντων. Στα πρώτα χρόνια της ζωής της πυθαγόρειας σχολής διατυπώθηκε η υπόθεση ότι οι αριθμοί θα μπορούσαν να είναι η ουσία των πάντων, μιας και κυριολεκτικά «τα στοιχεία των αριθμών ήταν τα στοιχεία όλων των πραγμάτων». Με αυτόν τον τρόπο, παρατηρεί ο Αριστοτέλης, «παρήγαν τον κόσμο από τους αριθμούς». Αυτή η άποψη δεν φαινόταν να ευσταθεί. Ο Αριστοτέλης σημειώνει στεγνά ότι «είναι αδύνατον τα [φυσικά] σώματα να αποτελούνται από αριθμούς», αν μη τη άλλο επειδή τα φυσικά σώματα βρίσκονται σε κίνηση και οι αριθμοί όχι. Σε κάποιο σημείο η ιδεολογία της σχολής άλλαξε και οι Πυθαγόρειοι άρχισαν να υιοθετούν μια πιο πλατωνική διάκριση, ανάμεσα στον κόσμο που αποκαλύπτεται από τις αισθήσεις και τον κόσμο όπως αποκαλύπτεται από τη νόηση. Η διατύπωση του πυθαγόρειου δόγματος αλλάζει. Οι αριθμοί είναι ένα πράγμα, ο κόσμος των αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά με τις αισθήσεις είναι άλλο πράγμα. Όμως οι αριθμοί εξακολουθούν να αποτελούν την ουσία των πραγμάτων, με τους Πυθαγόρειους να ανιχνεύουν

το δρόμο προς το ενδιαφέρον δόγμα ότι η αρμονία των αριθμών οδηγεί στην εξήγηση της αρμονίας των πραγμάτων.

«Για να δώσω ένα παράδειγμα αυτού που εννοώ», παρατηρεί ο Αριστοτέλης περιγράφοντας τους Πυθαγόρειους, «αφού το δέκα έμοιαζε να είναι ο τέλειος αριθμός που αγκαλιάζει τη φύση των αριθμών, συμπέραναν ότι ο αριθμός των σωμάτων που κινούνται στους ουρανοί είναι δέκα και αφού μόνο εννιά ήταν ορατά, με βάση τη θεωρία τους όρισαν την αντι-Γή ως το δέκατο». Κι αυτό δεν είναι ούτε σκοτεινό ούτε μυστικιστικό. Η διαδικασία πάνω στην οποία βασίστηκαν οι Πυθαγόρειοι για τα συμπεράσματά τους υποστηρίχθηκε από τους φυσικούς από τον 17ο ως τον 21ο αιώνα. Αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της πίστης τους.

Στη δεκαετία του 1920, για παράδειγμα, ο γάλλος μαθηματικός Πωλ Ντιράκ προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα της επέκτασης των εξισώσεων πεδίου Κλάιν-Γκόρντον ώστε να αποδίδουν σχετικιστικές λύσεις για το ηλεκτρόνιο. Οι λεπτομέρειες της προσπάθειας του Ντιράκ μπορούν να συνοψιστούν με ασφάλεια· η υπόθεση μοιάζει με τη ριφοκίνδυνη μανούβρα ενός ανθρώπου που παίρνει ένα δρόμο που δεν μπορεί να δει, βασιζόμενος για καθοδήγηση σε ένα δρόμο που γνωρίζει. Ο Ντιράκ σύντομα ήρθε αντιμέτωπος με δυσκολίες. Οι εξισώσεις έπρεπε να παραγοντοποιηθούν, όπως για παράδειγμα η έκφραση  $x^2 + 11x + 10$ , που αναλύεται στο γινόμενο  $x + 10$  επί  $x + 1$ · και για να μπορέσει να το πετύχει αυτό χρειαζόταν νέα μαθηματικά δεδομένα. Ψηλαφίζοντας πια και μαντεύοντας σαν τρελός, ο Ντιράκ κατάφερε να λύσει τις εξισώσεις πεδίου Κλάιν-Γκόρντον, θεωρώντας το σχετικιστικό ηλεκτρόνιο φυσικό αντίστοιχο ενός μαθηματικού αντικειμένου. Και τότε ο Ντιράκ πρόσεξε κάτι παράξενο. Οι λύσεις των εξισώσεων Κλάιν-Γκόρντον χωρίζονταν σαν την ουρά του διαβόλου. Μια λύση αντιστοιχούσε, όπως αναμενόταν, στο ηλεκτρόνιο, με το αρνητικό πρόσημο της εξίσωσης να αναπαριστά το αρνητικό φορτίο του ηλεκτρονίου· όμως μια άλλη, αντίθετη, λύση έμοιαζε να αντιστοιχεί στο ηλεκτρόνιο με όλες του τις ιδιότητες εκτός από το φορτίο. Υποδεδέστεροι μαθηματικοί θα είχαν απορρίψει αυτές τις λύσεις και θα συνέχιζαν την προσπάθεια. Ο Ντιράκ αγνόησε τη λογική τους και ανήγγειλε την ύπαρξη του ποζιτρονίου.

Είχε δει την αιχμή στην ουρά του διαβόλου. Μερικά χρόνια αργότερα –όχι πολλά, μην ανησυχείτε– οι πειραματικοί φυσικοί επιβεβαίωσαν την ύπαρξη του ποζιτρονίου.

Ας πετάξουμε έξω από την πυθαγόρεια παράδοση όλα όσα είναι

περιττά – τα κουκιά, το μυστικισμό των αριθμών και τις ιστορίες για αγρίου. Παραμένει το εξής: το δόγμα ότι ο αριθμός είναι η ουσία όλων των πραγμάτων, περασμένο μέσα από το πρίσμα αμέτρητων φιλοσοφικών ρευμάτων, εξακολουθεί να είναι η κεντρική ιδέα της δυτικής επιστήμης, το απαραίτητο κλειδί του συντονισμού της. Και κάτι ακόμα: Το γεγονός ότι αυτό το κλειδί ανοίγει τόσο πολλές κλειδαριές έχει εξυμνηθεί πολλές φορές, αλλά δεν έχει ποτέ εξηγηθεί.

Οι έλληνες ιστορικοί διηγούνται μια παράξενη ιστορία. Ένα πλοίο ταξίδευε στο Αιγαίο Πέλαγος, με τα κύματα να δέρονουν το ξύλινο σκαρί του και τους κωπηλάτες να τραγουδούν. Πάνω στο πλοίο βρίσκονταν κάμποσοι μαθηματικοί, όλοι Πυθαγόρειοι, αν και δεν ξέρω να σας πω γιατί μια παρέα μαθηματικών αποφάσισε να κάνει κρουαζιέρα.

Σήμερα ο Πυθαγόρας είναι περισσότερο γνωστός στην επίσημη ιστορία των μαθηματικών από το θεώρημα που έχει το όνομά του. Θα το χρειαστώ, γιατί μπορεί να βγει κάτι καλό. Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ . Οι αποστάσεις ανάμεσα σε διαφορετικά σημεία είναι αυτό που φαίνεται – αποστάσεις, δηλαδή αριθμοί. Αν δεν μπορούμε να παραστήσουμε τις αποστάσεις με αριθμούς, τότε μένουν ελάχιστα από τη μεγάλη πυθαγόρεια πρόταση ότι ο αριθμός είναι η ουσία των πάντων. Αν και φαίνεται πολύ απλό, ένα ορθογώνιο τρίγωνο –κάθε συνηθισμένο ορθογώνιο τρίγωνο– είναι ένα αντικείμενο που πάλλεται από κρυφές αριθμητικές σχέσεις: ειδικότερα, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι σε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο οι αποστάσεις από το  $A$  ως το  $B$  και από το  $B$  ως το  $\Gamma$  έχουν κάποια σχέση με την απόσταση από το  $A$  ως το  $\Gamma$ . Πράγματι, συνδέονται με την απλή σχέση:  $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2$ . Η απόδειξη που έδωσε ο Πυθαγόρας είναι όλο μουγκρητό και σπρωξιά. Ένας αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο δίνει δυνητικά το εμβαδόν μιας επιφάνειας. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι, άλλωστε, το γινόμενο του μήκους του επί το πλάτος του και εφόσον εξ ορισμού στο τετράγωνο αυτά τα δύο είναι ίσα, το εμβαδόν είναι το γινόμενο του μήκους του ή του πλάτους του επί τον εαυτό του. Ο Πυθαγόρας σκέφτηκε να κατασκευάσει τετράγωνα από κάθε πλευρά του τριγώνου και μετά, χρησιμοποιώντας μια σειρά από γεωμετρικές ρυθμίσεις –εδώ έρχεται το μουγκρητό– που σκόρπισαν με σπρωξιά αυτά τα τετράγωνα, έδειξε ότι το τετράγωνο...

Τώρα όμως που έδωσα το κλειδί, οι αναγνώστες μπορούν να ακο-

λουθήσουν τον Πυθαγόρα από την ανοιχτή πόρτα. Στα μαθηματικά μετράει πάντα το κλειδί.

Το πυθαγόρειο θεώρημα καταδικάζει κάθε αφελή εκδοχή του πυθαγόρειου προγράμματος, με τον επίλογο να γράφεται πάνω στο κατάστρωμα αυτού του σκάφους που είδαμε πριν να αποπλέει. Ένας μαθηματικός που ονομαζόταν Ίππασος ο Μεταπόντιος μόλις έχει σχηματίσει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές μήκους μιας μονάδας πάνω στο σκονισμένο κατάστρωμα του πλοίου. Ξεροβήχοντας για να τραβήξει την προσοχή, παρατηρεί ότι, σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, το μήκος της υποτεινούσας θα πρέπει να είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του δύο.

Τώρα ας υποθέσουμε, συνεχίζει ο Ίππασος, ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο είναι ένας αριθμός ή ότι μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα δύο αριθμών. Σε αυτή την περίπτωση  $\sqrt{2} = \mu/\nu$ . Τα βήματα που ακολουθούν μοιάζουν με μια σειρά χτυπημάτων στον τηλεγραφο.

Ταπ. Ας υποθέσουμε ότι το κλάσμα  $\mu/\nu$  έχει απλοποιηθεί με διαίρεση των όρων του με τον μέγιστο κοινό τους διαιρέτη.

Συνεπάγεται ότι είτε οι  $\mu$  και  $\nu$  είναι και οι δύο περιττοί ή ότι ο  $\mu$  είναι άρτιος και ο  $\nu$  περιττός ή, τέλος, ότι ο  $\nu$  είναι άρτιος και ο  $\mu$  περιττός.

Ο θαλασσινός αέρας βοηθάει την έμπνευση...

Ταπ. Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της εξίσωσης  $\sqrt{2} = \mu/\nu$  προκύπτει ότι  $2 = \mu^2/\nu^2$ .

Ταπ. Τότε  $2\nu^2 = \mu^2$ , δηλαδή ο  $\mu^2$  είναι άρτιος.

Επομένως  $\mu = 2x$ , όπου  $x$  κάποιος αριθμός. Άλλωστε αυτό σημαίνει το να λέμε ότι ένας αριθμός είναι άρτιος.

Ταπ. Υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο, προκύπτει ότι  $\mu^2 = 4x^2 = 2\nu^2$ ...

Ο τηλεγραφος τώρα σταματά, πριν όμως το τελικό χτύπημα· αλλά, όπως οι εφημερίδες αναγγέλλουν ένα σπουδαίο νέο στους τίτλους και οι λεπτομέρειες ακολουθούν στις μέσα σελίδες, ο αναγνώστης αρκεί να προσέξει ότι  $\nu^2 = 2x^2$  έτσι ώστε...

Όμως, αν και τα δικά μου χτυπήματα τελείωσαν, ο Ίππασος συνέχισε να χτυπάει, δείχνοντας με έκδηλη ικανοποίηση την αντίφαση που είχε κάνει την εμφάνισή της και ότι –ταπ, ταπ, ταπ– είναι άτοπο να υποθέσουμε ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα δύο αριθμών, και ότι –ταπ, ταπ, ταπ– από αυτό προκύπτει ότι ορισμένες αποστάσεις δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών και ότι –ταπ, ταπ, ταπ–...

Αλλά εδώ η ιστορία τελειώνει οριστικά. Οι Πυθαγόρειοι πέταξαν



τον Ίππασο από το πλοίο κι αυτός, χτυπώντας ακόμα τον τηλεγράφο, χάθηκε άδοξα.

Έχει λεχθεί ότι σε κάποια στιγμή της ζωής του ο Πυθαγόρας ανακήρυξε τον εαυτό του θεό.

Καλά έκανε.

